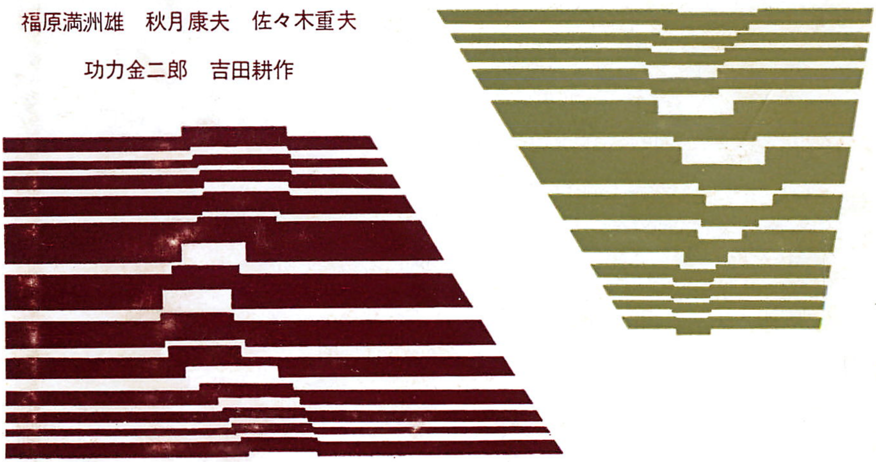
接続の幾何学

現代数学講座　19

大槻富之助 著



編集

福原満洲雄　秋月康夫　佐々木重夫

功力金二郎　吉田耕作

共立出版株式会社

接 続 の 幾 何 学

東京工業大学教授・理学博士
大 槻 富 之 助
著

共立出版株式会社

現代数学講座
19

まえがき

Levi-Civita の平行性をもった空間としての Riemann 空間論の発展と考えられる擬似接続空間，射影接続空間，共形接続空間の理論は，歴史的には色々の立場で研究されました．とくに F. Klein の意味の古典的な幾何学の拡張として，これらの接続の幾何学を研究した E. Cartan の考えは，これらの立場を統一的に眺めることを許し，また Lie 群論，微分形式論等とも密接に関係した理論的な深さをもったものであります．簡単にいえば微分可能多様体の各点において，接空間とよばれるこの多様体と同次元の擬似空間，射影空間，共形空間あるいは一般に連続変換群に従属する空間を考えて，任意の点とこれにごく近い点に対応するこれらの接空間の間の対応を与えるのが，これらの接続空間の接続であるとするものであって，動標構による方法ともよばれています．これを平易に説明したものには，日本ではすでに矢野健太郎氏の著書があります．

しかしながら，Cartan の接続の定義とその理論は直観的，幾何学的な特長をもっている半面，きわめて理解しにくい面をもっていることは，上の説明を見ただけでも明らかであります．このような点を救うものとして C. Ehresmann や S. S. Chern 氏等によるファイバー・バンドルを用いて接続の幾何学を論ずる新しい方法が近年になって現われてきました．

筆者は動標構による接続論において直観的な理解にまった部分をも理論化し，上記の三つの古典的な接続幾何学を統一的な立場で論じてみたいと考え，Ehresmann, Chern 氏らの方法に従って，これを試みました．第3章まではそのための準備であって，第4章は一般論としてのベクトル・バンドルの接続論，第5章以下はその応用としての擬似接続，射影接続，共形接続空間論であります．擬似接続空間は Chern 氏の著書に述べてあるところを大略紹介いたしました．任意の連続変換群を基本群とする接続空間の接続論は，この群の表現と関連させて第4章末に少し触れるにとどめました．微分幾何学的ベクト

ル・バンドルの構成の方法としては，Ehresmann 氏により導入された高階変換群 L_n^r を用いて代数的高階変換亜群 $L_n^{r,t}$ を定義し，その表現を考えることを基本としました．上記の古典的接続幾何学を考えるには $L_n^{2,1}$ を用いれば十分であります．

最後に本書を書くようにすすめてくださった東北大学の佐々木重夫教授およびいろいろと有益な意見を頂いた岡山大学の田代嘉宏助教授に感謝の意を表します．

1957年2月

大槻富之助

目　　次

第1章　テ　ン　ソ　ル

1·1　ベクトル空間とテンソル積

任意の体 F を考え，集合 V が F の上の**ベクトル空間**をなすとは V の任意の2元 x, y に対して和 $x+y$ が，F の任意の元 a と x に対して積 ax が定義されていて共に V の元であり，次の諸条件をみたすものをいう．

Ⅰ．和について V は可換群である．

Ⅱ．積については

1)　$a(x+y)=ax+ay$

2)　$(a+b)x=ax+bx$

3)　$a(bx)=(ab)x \qquad a, b \in F,\ \ x, y \in V$

4)　$0\,x=0$　および　$1\,x=x$.

V の元はベクトル，F の元は**スカラー**とよばれる．V の元 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ に対して，すべてが0とはならない F の元 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ があって $a_1x_1+\cdots+a_nx_n=0$ となるとき，$x_1, x_2, \cdots, x_n$ は **1次従属**，そうでないとき **1次独立**であるという．V が1次独立な n 個の元を含み，任意の $n+1$ 個の元が1次従属であるとき，V の**次元**は n であるといい，$\dim V=n$ で表わす．任意の自然数 n に対して，V が1次独立な n 個の元を含むとき，V は無限次元であるという．以後われわれは体 F を実数体にかぎり，主として有限次元のベクトル空間のみ考えることにする．V の部分集合は V での和と積についてそれ自身ベクトル空間をなすとき，**ベクトル部分空間**という．V の部分集合 S に対して，S を含む最小のベクトル部分空間を S から生成されたベクトル部分空間とよぶ．明らかにそれは S の任意の有限個の元の1次結合の全体からなる．S から生成されたベクトル空間が V で，S の任意の有限個の元がつねに1次独立のとき S は V の**基**をなすという．$\dim V=n$ のとき，1次独立な n 個の元 $x_1, \cdots, x_n$ をとると，V の任意の元 x は一意に $x=\sum a_ix_i$ と表わされるから，$\{x_1, \cdots, x_n\}$ は基である．$a_1, \cdots, a_n$ はこの基に関する x の

成分という．V の任意のベクトル部分空間 V_1, V_2 に対し x_1+x_2, $x_1 \in V_1$, $x_2 \in V_2$ の全体を V_1+V_2 で表わすと，容易にわかるようにこれはベクトル部分空間をなす．V_1 と V_2 の共通部分 $V_1 \cap V_2$ についても同様である．ベクトル部分空間 W を考え，V の2元 x, y が $x-y \in W$ のとき同値関係にあるとすることによって V を類別すれば，新たにベクトル空間が自然な方法で定まる．これを $V-W$ で表わし V の W による**剰余空間**という．$\dim(V-W) = \dim V - \dim W$ であることはすぐにいえる．

V の上で定義せられ F に値をとる線型函数 f，すなわち $f(ax+by)=af(x)+bf(y)$ であるようなものの全体を考える．この集合の任意の元 f, g に対し $f+g$, af, $a \in F$ を $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$, $(af)(x)=af(x)$ で定義すれば，これが F の上のベクトル空間をなすことは容易に証明することができる．これを V の**双対空間**といい，V^* で表わす．V が基 S をもてば，V^* の元は S の上の函数として与えられれば一意に定まることは明らかである．$\dim V=n$ のとき，任意の $x \neq 0$ に対して，$\{x=x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ なる基をとることができる．V^* 上の F 値函数を $x(x^*)=x^*(x)$, $x^* \in V^*$ で定義すると $x(ax^*+by^*) = (ax^*+by^*)(x) = ax^*(x)+by^*(x) = ax(x^*)+bx(y^*)$ であるから，これは線型である．よって x は $(V^*)^*=V^{**}$ の元と考えることができて，しかも 0 元とは異なることは明らかである．よって $V \subset V^{**}$．ところで V の基 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ に対して

$$\langle x_i, x_j^* \rangle \equiv x_j^*(x_i) = \delta_{ij} \tag{1·1}$$

なる V^* の元 $x_1^*, \cdots, x_n^*$ をとる．δ_{ij} は **Kronecker のデルタ**とよばれ，$i=j$ のときに1を，$i \neq j$ のときに0を表わす記号である．任意の元 $x^* \in V^*$ に対し $\langle x_i, x^* \rangle = u_i$ とすれば $x^* = \sum u_i x_i^*$ であるから，$\{x_1^*, \cdots, x_n^*\}$ は V^* の基をなし $\{x_1, \cdots, x_n\}$ の**双対基**とよばれる．したがって $\dim V = \dim V^* = \dim V^{**}$, $V=V^{**}$ である．

F の上のベクトル空間 $V_1, V_2, \cdots, V_m, Z$ があるとき，積空間 $V_1 \times \cdots \times V_m$ から Z への写像 f は $f(x_1, \cdots, ax_i+by_i, \cdots, x_m) = af(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_m) + bf(x_1, \cdots, y_i, \cdots, x_m)$, $x_i, y_i \in V_i$, $i=1,2,\cdots,m$, $a, b \in F$ であるとき，$m=1$

ならば**線型**，$m>1$ ならば**複線型**であるという．$m=2$ のときにはとくに**双次写像**という．このような f の全体に対し線型函数のときと同じように和と積を定義すれば，ベクトル空間をつくることは明らかである．これを $\mathfrak{L}(V_1, \cdots, V_m; Z)$ で表わす．

ベクトル空間 V からその部分ベクトル空間 W への線型写像 $\pi: V\to W$ が W の各元を動かさないとき，π は V から W への**射影**とよばれる．

ベクトル空間 V, W に対し，$V\times W$ の元の全体を基とする F の上のベクトル空間，すなわち有限個の元の形式的和 $\sum a_{xy}(x, y)$, $x\in V, y\in W, a_{xy}\in F$, 高々有限個の係数 a_{xy} のほか 0，の全体からなるものを $V\circ W$ で表わし，$V\times W\subset V\circ W$ と見なす．$V\circ W$ の元で $(ax_1+bx_2, y)-a(x_1, y)-b(x_2, y)$, $(x, ay_1+by_2)-a(x, y_1)-b(x, y_2)$ なる形のものの全体によって張られる部分ベクトル空間を S として，剰余空間 $V\circ W-S$ を $V\otimes W$ で表わし V と W との**テンソル積**という．元 (x, y) の属する類を $x\otimes y$ で表わし，このようにして得られる自然な写像を $h: V\times W\to V\otimes W$ とする．$\mathfrak{L}(V, W; Z)$ の任意の元 f に対して，$\bar{f}: V\circ W\to Z$ を $\bar{f}(\sum a_{xy}((x, y)))=\sum a_{xy}f(x, y)$ で定義すれば $\bar{f}$ は f の拡張で線型写像である．明らかに，この定義の仕方と f が複線型なことから $\bar{f}(S)=0$. $h(V\times W)$ が $V\otimes W$ を張るから，この f に対して $\mathfrak{L}(V\otimes W; Z)$ の元 g が $f(x, y)=g(x\otimes y)=gh(x, y)$ なるように一意に定まる．$f\neq 0$ ならば，もちろん $g\neq 0$. 逆に g が与えられれば $f=gh$ として $\mathfrak{L}(V, W; Z)$ の元 f が定まる．このようにして $\mathfrak{L}(V, W; Z)$ と $\mathfrak{L}(V\otimes W; Z)$ の間に1対1の対応がついて，しかもベクトル空間の対応として同型的である．同じようにして $V_1\otimes V_2\otimes\cdots\otimes V_m$ が定義せられ

$$\mathfrak{L}(V_1, \cdots, V_m; Z)\approx\mathfrak{L}(V_1\otimes\cdots\otimes V_m; Z). \qquad (1\cdot 2)$$

さて $\{x_1, \cdots, x_n\}$ と $\{y_1, \cdots, y_m\}$ をそれぞれ V と W の基とし，その双対基を $\{x_1^*, \cdots, x_n^*\}$ と $\{y_1^*, \cdots, y_m^*\}$ とする．nm 個の元 $x_i\otimes y_\lambda$ が $V\otimes W$ を張ることは明らかである．したがって $\dim V\otimes W\leqq nm$. 他方 $\mathfrak{L}(V\times W; F)\ni f_{i\lambda}$ を $f_{i\lambda}(x_j, y_\mu)=\delta_{ij}\delta_{\lambda\mu}$ なる元とすれば，これらの nm 個の元 $f_{i\lambda}$ は1次独立である．よって，$\dim\mathfrak{L}(V, W; F)=\dim\mathfrak{L}(V\otimes W; F)=\dim(V$

$\otimes W)^* = \dim V\otimes W \geqq nm$. すなわち，$\{x_i\otimes y_\lambda\}$ は基をなし

$$\dim V\otimes W = \dim V \times \dim W \tag{1·3}$$

以上の考察から $V\otimes W$ の元と $V^*\otimes W^*$ の元との内積を

$$\langle \sum a_{i\lambda} x_i \otimes y_\lambda, \sum b_{j\mu} x_j{}^* \otimes y_\mu{}^* \rangle = \sum a_{i\lambda} b_{i\lambda} \tag{1·4}$$

で定義することができる．この内積の定義が V, W の基のとり方に関係しないことを示そう．V の他の基 $\{\bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_n\}$ に対して $\bar{x}_i = \sum \alpha_{ij} x_j$, $x_j = \sum \beta_{ji} \bar{x}_i$ とすれば，$x_j{}^* = \sum \alpha_{ij} \bar{x}_i{}^*$, $\bar{x}_i{}^* = \sum \beta_{ji} x_j{}^*$ で，かつ $\sum \alpha_{ik}\beta_{kj} = \sum \alpha_{ki}\beta_{jk} = \delta_{ij}$ であることから，$\langle \bar{x}_i \otimes y_\lambda, \bar{x}_j{}^* \otimes y_\mu{}^* \rangle = \langle \sum \alpha_{ih} x_h \otimes y_\lambda, \sum \beta_{kj} x_k{}^* \otimes y_\mu \rangle = \sum \alpha_{ih}\beta_{kj}\delta_{hk}\delta_{\lambda\mu} = \delta_{ij}\delta_{\lambda\mu}$. これは (1·4) で定義した内積が V の基のとり方に依存しないことを示している．W についても同じである．この内積によって

$$(V\otimes W)^* = V^* \otimes W^* \tag{1·5}$$

基の比較によって

$$(V\otimes W)\otimes Z \approx V\otimes W\otimes Z, \qquad V\otimes W \approx W\otimes V \tag{1·6}$$

であることはすぐにいうことができる．

線型写像 $f_i \in \mathfrak{L}(V_i\,;\,W_i)$, $i=1,2$ に対し $\mathfrak{L}(V_1, V_2\,;\,W_1\otimes W_2)$ の元 φ を $\varphi(x_1, x_2) = f_1(x_1)\otimes f_2(x_2)$, $x_i \in V_i$ で定め，この φ に対応する $\mathfrak{L}(V_1\otimes V_2\,;\,W_1\otimes W_2)$ の元を $f_1\otimes f_2$ で表わし f_1 と f_2 のテンソル積という．すなわち

$$(f_1\otimes f_2)(x_1\otimes x_2) = f_1(x_1)\otimes f_2(x_2) \qquad x_1 \in V_1,\ x_2 \in V_2 \tag{1·7}$$

さらに $g_i \in \mathfrak{L}(W_i\,;\,Z_i)$, $i=1,2$ をとり，線型写像 $g_i f_i : V_i \to Z_i$ を考えると $g_1 f_1(x_1)\otimes g_2 f_2(x_2) = (g_1\otimes g_2)(f_1(x_1)\otimes f_2(x_2)) = (g_1\otimes g_2)(f_1\otimes f_2)(x_1\otimes x_2)$ であるから

$$g_1 f_1 \otimes g_2 f_2 = (g_1\otimes g_2)(f_1\otimes f_2) \tag{1·8}$$

である．

最後に，任意の元 $f \in \mathfrak{L}(V\,;\,W)$ に対して $\mathfrak{L}(W^*, V^*)$ の元 f^* を次の式

$$\langle x, f^*(y^*) \rangle = \langle f(x), y^* \rangle \qquad x \in V,\ y^* \in W^* \tag{1·9}$$

で定義し f の**双対写像**という．$(f^*)^* = f$ であることはすぐにいうことができる．$g \in \mathfrak{L}(W\,;\,Z)$ をとり，写像 gf の双対写像を考える．$\langle x, (gf)^* z^* \rangle = \langle gf(x), z^* \rangle = \langle f(x), g^*(z^*) \rangle = \langle x, f^* g^*(z^*) \rangle$ であるから

$$(gf)^*=f^*g^* \tag{1·10}$$

注意 F が環の場合にもベクトル空間を同様に定義する.

1·2 テンソル空間

n 次元ベクトル空間 V とその双対空間 V^* を考え, r 個の V と s 個の V^* のテンソル積 $V_s{}^r=V\otimes\cdots V\otimes V^*\otimes\cdots\otimes V^*$ の元を **r 次反変 s 次共変テンソル**といい, とくに $s=0$ のとき **r 次反変テンソル**, $r=0$ のとき **s 次共変テンソル**という. V と V^* の元をそれぞれ**反変ベクトル**, **共変ベクトル**という. (1·6) によって, r 個の V と s 個の V^* の $\binom{r+s}{r}$ 通りあるテンソル積は互に同型である. V の基 $\{e_1,\cdots,e_n\}$ とその双対基 $\{e^1,\cdots,e^n\}$ をとれば, 前節により $\{e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_r}\otimes e^{j_1}\otimes\cdots\otimes e^{j_s}\}$ が $V_s{}^r$ の基をなすから, $V_s{}^r$ の任意のテンソル x は

$$x=\sum\xi^{i_1\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_s}e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_r}\otimes e^{j_1}\otimes\cdots\otimes e^{j_s} \tag{1·11}$$

と一意に表わされる. V の他の基 $\{\bar{e}_1,\cdots,\bar{e}_n\}$ とその双対基 $\{\bar{e}^1,\cdots,\bar{e}^n\}$ をとり

$$\bar{e}_i=\sum\alpha_i{}^je_j,\qquad \bar{e}^k=\sum\beta_h{}^ke^h \tag{1·12}$$

とすれば

$$\sum\alpha_i{}^h\beta_h{}^j=\sum\alpha_h{}^j\beta_i{}^h=\delta_i{}^j \tag{1·13}$$

である. この基による x の成分を $\bar{\xi}^{h_1\cdots h_r}{}_{k_1\cdots k_s}$ とすれば, (1·11) と (1·12) から

$$x=\sum\xi^{i_1\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_s}\beta_{i_1}^{h_1}\cdots\beta_{i_r}^{h_r}\alpha_{k_1}^{j_1}\cdots\alpha_{k_s}^{j_s}\bar{e}_{h_1}\otimes\cdots\otimes\bar{e}_{h_r}\otimes\bar{e}^{k_1}\otimes\cdots\otimes\bar{e}^{k_s}$$

であるから

$$\bar{\xi}^{h_1\cdots h_r}{}_{k_1\cdots k_s}=\sum\beta_{i_1}^{h_1}\cdots\beta_{i_r}^{h_r}\alpha_{k_1}^{j_1}\cdots\alpha_{k_s}^{j_s}\xi^{i_1\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_s} \tag{1·14}$$

逆に V の任意の基 $\mathbf{e}=\{e_1,\cdots,e_n\}$ に対して F の元からなる組 $\{\xi^{i_1\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_s}(\mathbf{e})\}$ が定まっていて, 他の基 $\bar{\mathbf{e}}$ との間に (1·12) の関係があるとき $\xi^{i_1\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_s}(\mathbf{e})$ と $\xi^{i_1\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_s}(\bar{\mathbf{e}})$ との間に (1·14) が成り立てば, これは $V_s{}^r$ のあるテンソルの成分を表わしていることは明らかである. このことを一般化して $\{\xi^{i_1\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_s}(\mathbf{e})\}$ の間に

$$\xi^{h_1\cdots h_r}{}_{k_1\cdots k_s}(\bar{\mathbf{e}})=\det(\alpha_i{}^j)^W\sum\beta_{i_1}^{h_1}\cdots\beta_{i_r}^{h_r}\alpha_{k_1}^{j_1}\cdots\alpha_{k_s}^{j_s}\xi^{i_1\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_s}(\mathbf{e}) \tag{1·15}$$

なる関係があるとき，これらは**重さ W の r 次反変 s 次共変のテンソル**の成分であるという．

V の同型的対応 f をとり，r 個の f と s 個の $(f^{-1})^*$ のテンソル積 $f_s^r = f\otimes\cdots\otimes f\otimes(f^{-1})^*\otimes\cdots\otimes(f^{-1})^* : V_s^r \to V_s^r$ を考える．(1·8) と (1·10) を用いると，任意の同型的対応 f_1, f_2 に対して

$$(f_2)_s^r(f_1)_s^r = (f_2 f_1)_s^r \tag{1·16}$$

V の恒等変換 1 に対応する 1_s^r が V_s^r の恒等変換となり，$f \neq 1$ ならば $f_s^r \neq 1_s^r$ であることがすぐにいえる．したがって f に対して $f_s^r = \varphi_s^r(f)$ を対応させる V の上での同型的変換全体のつくる群 $L(V)$ から V_s^r の上での同型的変換全体のつくる群 $L(V_s^r)$ の中への対応

$$\varphi_s^r : L(V) \to L(V_s^r) \tag{1·17}$$

は群から他の群の中への対応として同型的である．ベクトル空間 V_s^r のベクトル部分空間は $\varphi_s^r(L(V))$ の元によってつねに自分自身にうつされるとき，V の上の**テンソル空間**という．重さのあるテンソルに対しても同じように定義する．

V_s^r から V_{s-1}^{r-1} への線型写像 $\psi_{\lambda\mu} : V_s^r \to V_{s-1}^{r-1}$ を

$$\psi_{\lambda\mu}(\mathrm{e}_{i_1}\otimes\cdots\otimes\mathrm{e}_{i_r}\otimes\mathrm{e}^{j_1}\otimes\cdots\otimes\mathrm{e}^{j_s})$$
$$=\langle \mathrm{e}_{i_\lambda}, \mathrm{e}^{j_\mu}\rangle \mathrm{e}_{i_1}\otimes\cdots\otimes\hat{\mathrm{e}}_{i_\lambda}\otimes\cdots\otimes\mathrm{e}_{i_r}\otimes\mathrm{e}^{j_1}\otimes\cdots\otimes\hat{\mathrm{e}}^{j_\mu}\otimes\cdots\otimes\mathrm{e}^{j_s} \tag{1·18}$$

で定義する．ただし，右辺の記号 ^ は e_{i_λ} と e^{j_μ} を除くことを意味するものとしよう．$\psi_{\lambda\mu}$ は V の基のとり方にかかわらないことは前節の推論から容易にいえる．任意の元 $x \in V_s^r$ が (1·11) で表わされたとすると，$y = \psi_{\lambda\mu}(x)$ の成分は明らかに $\sum \xi^{i_1\cdots i_{\lambda-1} l i_{\lambda+1}\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_{\mu-1} l j_{\mu+1}\cdots j_s}$ となる．$\psi_{\lambda\mu}$ は λ 番目の反変添字と μ 番目の共変添字に関する**縮合**という．任意の $f \in L(V)$ によって，V の基 $\mathrm{e} = \{\mathrm{e}_1, \cdots, \mathrm{e}_n\}$ が基 $\bar{\mathrm{e}} = \{\bar{\mathrm{e}}_1, \cdots, \bar{\mathrm{e}}_n\}$, $\bar{\mathrm{e}}_i = f(\mathrm{e}_i)$ にうつったとすると，$(f^{-1})^*(\mathrm{e}^i) = \bar{\mathrm{e}}^i$ であるから

$$f_{s-1}^{r-1}\psi_{11}(\mathrm{e}_{i_1}\otimes\cdots\otimes\mathrm{e}_{i_r}\otimes\mathrm{e}^{j_1}\otimes\cdots\otimes\mathrm{e}^{j_s})$$
$$= f_{s-1}^{r-1}(\delta_{i_1}^{j_1}\mathrm{e}_{i_2}\otimes\cdots\otimes\mathrm{e}_{i_r}\otimes\mathrm{e}^{j_2}\otimes\cdots\otimes\mathrm{e}^{j_s})$$
$$= \delta_{i_1}^{j_1}\bar{\mathrm{e}}_{i_2}\otimes\cdots\otimes\bar{\mathrm{e}}_{i_r}\otimes\bar{\mathrm{e}}^{j_2}\cdots\otimes\bar{\mathrm{e}}^{j_s}$$

$$=\psi_{11}f_s^r(\mathrm{e}_{i_1}\otimes\cdots\otimes\mathrm{e}_{i_r}\otimes\mathrm{e}^{j_1}\otimes\cdots\otimes\mathrm{e}^{j_s}) \tag{1·19}$$

つまり，$f_{s-1}^{r-1}\psi_{11}=\psi_{11}f_s^r$ である．同じように

$$f_{s-1}^{r-1}\psi_{\lambda\mu}=\psi_{\lambda\mu}f_s^r \tag{1·20}$$

なる関係が一般に成り立つ．したがって $\psi_{\lambda\mu}(V_s^r)$ は V の上のテンソル空間をなす．

前節の考察によって $V_s^r\otimes V_u^t\cong V_{s+u}^{r+t}$ であるから，双一次の対応

$$V_s^r\times V_u^t\to V_{s+u}^{r+t} \tag{1·21}$$

がある．これを**テンソルの積**という．

$$V_s^r\ni x=\sum\xi^{i_1\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_s}\mathrm{e}_{i_1}\otimes\cdots\otimes\mathrm{e}_{i_r}\otimes\mathrm{e}^{j_1}\otimes\cdots\otimes\mathrm{e}^{j_s},$$

$$V_u^t\ni y=\sum\eta^{k_1\cdots k_t}{}_{h_1\cdots h_u}\mathrm{e}_{k_1}\otimes\cdots\otimes\mathrm{e}_{k_t}\otimes\mathrm{e}^{h_1}\otimes\cdots\otimes\mathrm{e}^{h_u}$$

$$x\otimes y=\sum\zeta^{i_1\cdots i_{r+t}}{}_{j_1\cdots j_{s+u}}\mathrm{e}_{i_1}\otimes\cdots\otimes\mathrm{e}_{i_{r+t}}\otimes\mathrm{e}^{j_1}\otimes\cdots\otimes\mathrm{e}^{j_{s+u}}$$

とすれば

$$\zeta^{i_1\cdots i_r k_1\cdots k_t}{}_{j_1\cdots j_s h_1\cdots h_u}=\xi^{i_1\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_s}\eta^{k_1\cdots k_t}{}_{h_1\cdots h_u} \tag{1·22}$$

である．明らかに $f_{s+u}^{r+t}(x\otimes y)=f_s^r(x)\otimes f_u^t(y)$ であるから，テンソルの積による $V_s^r\times V_u^t$ の V_{s+u}^{r+t} の中での像は V の上のテンソル空間をなす．

いままで，V と V^* のテンソル積の順序については書き表わし易い代表的なものだけ考えてきたが，例えば $V\otimes V^*\otimes V$ の元 x は

$$x=\sum\xi^i{}_j{}^k\mathrm{e}_i\otimes\mathrm{e}^j\otimes\mathrm{e}_k$$

のように，成分の添字 i,j,k の並べ方に積の順序が現われるような方法を用いる．$V^*\otimes V$ の元 $y=\sum\eta_i{}^j\mathrm{e}^i\otimes\mathrm{e}_j$ として，x と y のテンソル積は

$$x\otimes y=\sum\xi^i{}_j{}^k\eta_k{}^l\mathrm{e}_i\otimes\mathrm{e}^j\otimes\mathrm{e}_k\otimes\mathrm{e}^h\otimes\mathrm{e}_l$$

である．

1·3 外積代数

r 個の数字 $1,2,\cdots,r$ の置換全体のつくる対称群を $\mathfrak{S}_r$ とする．$V_0^r=V^r$ に対して $h:V\times\cdots\times V\to V^r=V\otimes\cdots\otimes V$ を複線型な自然な写像とする．$\mathfrak{S}_r$ の任意の元 σ に対して複線型写像 $f_\sigma:V\times\cdots\times V\to V^r$ を

$$f_\sigma(x_1,\cdots,x_r)=x_{\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes x_{\sigma(r)}$$

で定義することができる．しかるとき，1·1 の推論から $f_\sigma=g_\sigma h$ である線型写像 $g_\sigma: V^r\to V^r$ が一意に定まる．この g_σ を簡単に σ で表わそう．この定義により

$$\sigma(x_1\otimes\cdots\otimes x_r)=x_{\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes x_{\sigma(r)} \tag{1·23}$$

である．$g_\sigma g_\tau=g_{\sigma\tau}$, $\sigma,\tau\in\mathfrak{S}_r$ で $\sigma\neq 1$ ならば $g_\sigma\neq 1$ であるから，上に述べたように g_σ を σ と表わしてよろしいのである．もちろん $\sigma\in L(V^r)$ である．

V^r のテンソル x は任意の $\sigma\in\mathfrak{S}_r$ に対して，$\sigma(x)=x$ ならば**対称テンソル**，$\sigma(x)=(\operatorname{sgn}\sigma)x$ ならば**交代テンソル**という．ただし $\operatorname{sgn}\sigma$ は σ が偶置換のとき 1，奇置換のとき -1 を表わす記号であって

$$\operatorname{sgn}(\sigma\tau)=(\operatorname{sgn}\sigma)(\operatorname{sgn}\tau)$$

なる性質をもっている．V^r の上の線型写像 S_r, A_r を

$$S_r(z)=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_r}\sigma(z)$$
$$A_r(z)=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_r}(\operatorname{sgn}\sigma)\sigma(z) \qquad z\in V^r \tag{1·24}$$

で定義する．任意の元 $\tau\in\mathfrak{S}_r$ に対して $\tau S_r(z)=\sum_\sigma\tau\sigma(z)=\sum_\sigma\sigma(z)=S_r(z)=\sum_\sigma\sigma\tau(z)=S_r\tau(z)$，$\tau A_r(z)=\sum_\sigma(\operatorname{sgn}\sigma)\tau\sigma(z)=(\operatorname{sgn}\tau)\sum_\sigma(\operatorname{sgn}(\tau\sigma))\tau\sigma(z)=(\operatorname{sgn}\tau)A_r(z)$，　$A_r\tau(z)=\sum_\sigma(\operatorname{sgn}\sigma)\sigma\tau(z)=(\operatorname{sgn}\tau)\sum_\sigma(\operatorname{sgn}(\sigma\tau))\sigma\tau(z)=(\operatorname{sgn}\tau)A_r(z)$ であるから，S_r と A_r は $\mathfrak{S}_r$ の元とつぎの関係式

$$\sigma S_r=S_r=S_r\sigma$$
$$\sigma A_r=(\operatorname{sgn}\sigma)A_r=A_r\sigma \tag{1·25}$$

をみたす．任意の $z\in V^r$ に対して $S_r(z)$ は対称テンソル，$A_r(z)$ は交代テンソルになる．$L(V)$ の任意の元 f に対して $f^r\sigma(x_1\otimes\cdots\otimes x_r)=fx_{\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes fx_{\sigma(r)}=\sigma(fx_1\otimes\cdots\otimes fx_r)=\sigma f^r(x_1\otimes\cdots\otimes x_r)$ であるから

$$f^r\sigma=\sigma f^r, \qquad \sigma\in\mathfrak{S}_r, \qquad f\in L(V) \tag{1·26}$$

対称テンソルの全体と交代テンソルの全体は V^r のベクトル部分空間をなすことは明らかであるが，(1·26) によってそれぞれ V の上のテンソル空間をなしている．これらを $S(V^r)$ と $A(V^r)$ で表わそう．他方 z を任意の対称または交代テンソルとすれば $S_r(z)=r!z$ または $A_r(z)=r!z$ であるから，写像

$S_r/r!$ と $A_r/r!$ は V^r のベクトル部分空間としての対称テンソル空間と交代テンソル空間への射影であることがわかる．両部分空間は0元を共有するのみである．S_r と A_r とはそれぞれ**対称化，交代化**という．

線型写像 A_r に対する0元の逆像 $N^r = A_r^{-1}(0)$ によって商空間（剰余空間）$V^r - N^r = \Lambda^r(V)$ を考える．$\Lambda^r(V)$ の元は **r-ベクトル**とよばれる．$\Lambda^0(V) = F, \Lambda^1(V) = V$ とおくことにする．自然な写像を $\psi : V^r \to \Lambda^r(V)$ として

$$\psi(x_1 \otimes \cdots \otimes x_r) = x_1 \wedge \cdots \wedge x_r \qquad x_1, \cdots, x_r \in V \tag{1·27}$$

のように表わす．r-ベクトルはこのような形のとき**分解可能**または**単純**であるという．上に述べた A_r の性質から，$\Lambda^r(V)$ は V^r の交代テンソル空間 $A(V^r)$ と $A_r/r!$ を介して同型である．対応する元を同じものとみなせば

$$x_1 \wedge \cdots \wedge x_r = \frac{1}{r!} A_r(x_1 \otimes \cdots \otimes x_r) \tag{1·28}$$

である．(1·25) によって

$$x_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge x_{\sigma(r)} = (\mathrm{sgn}\,\sigma) x_1 \wedge \cdots \wedge x_r \tag{1·29}$$

である．

r-ベクトルと s-ベクトルの積を $\xi \ni \Lambda^r(V), \eta \in \Lambda^r(V)$ に対して

$$\xi \wedge \eta = \frac{1}{(r+s)!} A_{r+s}(\xi \otimes \eta) \tag{1·30}$$

と定義し ξ と η の**外積**という．置換群 $\mathfrak{S}_r$ と $\mathfrak{S}_s$ を $\mathfrak{S}_{r+s}$ の部分群として，$\mathfrak{S}_r$ の元はあとの s 個の文字を動かさないもの，$\mathfrak{S}_s$ の元ははじめの r 個の文字を動かさないものとして $\mathfrak{S}_{r+s}$ の元とみなしておけば，$\xi = x_1 \wedge \cdots \wedge x_r$ と $\eta = y_1 \wedge \cdots \wedge y_s$ に対して (1·25) を用いれば

$$\xi \wedge \eta = \frac{1}{(r+s)!} A_{r+s}\left(\frac{1}{r!} A_r(x_1 \otimes \cdots \otimes x_r) \otimes \frac{1}{s!} A_s(y_1 \otimes \cdots \otimes y_s)\right)$$

$$= \frac{1}{(r+s)!} A_{r+s}\left(\left(\frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_r} (\mathrm{sgn}\,\sigma)\sigma(x_1 \otimes \cdots \otimes x_r)\right)\right.$$

$$\left.\otimes\left(\frac{1}{s!} \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_s} (\mathrm{sgn}\,\tau)\tau(y_1 \otimes \cdots \otimes y_s)\right)\right)$$

$$=\frac{1}{(r+s)!r!s!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_r,\tau\in\mathfrak{S}_s}(\operatorname{sgn}\sigma)(\operatorname{sgn}\tau)A_{r+s}\Big((\sigma\tau)(x_1\otimes\cdots\otimes x_r\otimes y_1\otimes\cdots\otimes y_s)\Big)$$

$$=\frac{1}{(r+s)!r!s!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_r,\tau\in\mathfrak{S}_s}A_{r+s}(x_1\otimes\cdots\otimes x_r\otimes y_1\otimes\cdots\otimes y_s)$$

$$=\frac{1}{(r+s)!}A_{r+s}(x_1\otimes\cdots\otimes x_r\otimes y_1\otimes\cdots\otimes y_s)$$

$$=x_1\wedge\cdots\wedge x_r\wedge y_1\wedge\cdots\wedge y_s$$

であるから公式

$$(x_1\wedge\cdots\wedge x_r)\wedge(y_1\wedge\cdots\wedge y_s)=x_1\wedge\cdots\wedge x_r\wedge y_1\wedge\cdots\wedge y_s \tag{1·31}$$

が成り立つ．以上の考察から外積についてつぎの関係が成り立つ．ξ,ξ_1,ξ_2 を r–ベクトルとし，η,η_1,η_2 を s–ベクトルとすると，交代化が線型ゆえ

$$\begin{aligned}(a_1\xi_1+a_2\xi_2)\wedge\eta&=a_1\xi_1\wedge\eta+a_2\xi_2\wedge\eta\\ \xi\wedge(a_1\eta_1+a_2\eta_2)&=a_1\xi\wedge\eta_1+a_2\xi\wedge\eta_2\end{aligned} \tag{1·32}$$

であり，ζ を t–ベクトルとすれば

$$(\xi\wedge\eta)\wedge\zeta=\xi\wedge(\eta\wedge\zeta)\quad(\text{これを } \xi\wedge\eta\wedge\zeta \text{ と表わす}) \tag{1·33}$$

$$\xi\wedge\eta=(-1)^{rs}\eta\wedge\xi \tag{1·34}$$

である．

(1·29) によって r–ベクトル $x_1\wedge\cdots\wedge x_r$ は $x_i=x_j$, $1\leqq i<j\leqq r$ なる添字 i と j があれば 0 元である．$\{\mathrm{e}_1,\cdots,\mathrm{e}_r\}$ を V の基とすれば $\{\mathrm{e}_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{e}_{i_r}\}$, $1\leqq i_1<\cdots<i_r\leqq n$ が $\Lambda^r(V)$ を張る．したがって $r>n$ のとき $\Lambda^r(V)=0$ である．$r=n$ のとき $A_r(\mathrm{e}_1\otimes\cdots\otimes\mathrm{e}_n)\neq 0$ であることは明らかであるから $\mathrm{e}_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{e}_n\neq 0$．$1\leqq r<n$ のときには上に述べた r–ベクトルは一次独立である．なんとなれば，もしも

$$\sum_{i_1<\cdots<i_r}a_{i_1\cdots i_r}\mathrm{e}_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{e}_{i_r}=0$$

とすれば，これに $\mathrm{e}_{r+1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{e}_n$ をかけると $a_{12\cdots r}\mathrm{e}_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{e}_n=0$ を得るから $a_{12\cdots r}=0$．同じ方法で $a_{i_1\cdots i_r}=0$ を得る．すなわち，これらは一次独立でなければならない．よって $\mathrm{e}_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{e}_{i_r}$, $1\leqq i_1<\cdots<i_r\leqq n$ は $\Lambda^r(V)$ の基を

なすことがわかった．

$\Lambda^r(V)$, $r=0,1,\cdots,n$, の直和空間を $\Lambda(V)=\sum_{r=0}^{n}\Lambda^r(V)$ とおき，このベクトル空間における積を $\xi=\sum\xi^r$, $\eta=\sum\eta^r$, $\xi^r,\eta^r\in\Lambda^r(V)$ に対して

$$\xi\wedge\eta=\sum_{r+s=0}^{n}\xi^r\wedge\eta^s \tag{1·35}$$

で定義すると，(1·32), (1·33) が成立することは明らかである．この $\Lambda(V)$ を V の**外積代数**または **Grassmann 代数**という．以上の考察から $\Lambda(V)$ の元

$$\mathrm{e}_{i_1}\wedge\mathrm{e}_{i_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{e}_{i_r},\qquad 1\leqq i_1<\cdots<i_r\leqq n \tag{1·36}$$
$$r=1,2,\cdots,n$$

と F の単位元 1 からなる集合は $\Lambda(V)$ の基をなし

$$\dim\Lambda(V)=\sum\dim\Lambda^r(V)=\sum\binom{n}{r}=2^n \tag{1·37}$$

である．任意の r-ベクトル ξ は一意に

$$\xi=\sum_{i_1<\cdots<i_r}a_{i_1\cdots i_r}\mathrm{e}_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{e}_{i_r}$$

$$=\sum_{i_1<\cdots<i_r,\,\sigma\in\mathfrak{S}_r}\frac{1}{r!}(\mathrm{sgn}\,\sigma)a_{i_1\cdots i_r}\sigma(\mathrm{e}_{i_1}\otimes\cdots\otimes\mathrm{e}_{i_r})$$

と表わされる．$\mathrm{e}_{j_1}\otimes\cdots\otimes\mathrm{e}_{j_r}=\sigma(\mathrm{e}_{i_1}\otimes\cdots\otimes\mathrm{e}_{i_r})$ のとき

$$a^{j_1\cdots j_r}=\frac{1}{r!}(\mathrm{sgn}\,\sigma)a_{i_1\cdots i_r}$$

とおけば $a^{j_1\cdots j_r}$ はすべての添字 $j_1,\cdots,j_r=1,2,\cdots,n$ の組に定義できて，添字 $j_1,\cdots,j_r$ について交代である．ξ は $A(V^r)$ の交代テンソルとしては

$$\xi=\sum_{i_1\cdots i_r}a^{i_1\cdots i_r}\mathrm{e}_{i_1}\otimes\cdots\otimes\mathrm{e}_{i_r} \tag{1·38}$$

と表わすことができる．

次に V からベクトル空間 W への任意の線型写像 $f:V\to W$ に対しては，W^r から $\Lambda^r(W)$ への自然な写像を φ として，(1·26) によって $f^rA_r=A_rf^r$ であるから $\Lambda^r(f):\Lambda^r(V)\to\Lambda^r(W)$ なる線型写像を

$$\Lambda^r(f)\psi(\xi)=\varphi f^r(\xi),\qquad \xi\in A(V^r) \tag{1·39}$$

で定義することができる．実際 $\xi=x_1\wedge\cdots\wedge x_r$ のとき

$$\begin{aligned}\Lambda^r(f)(x_1\wedge\cdots\wedge x_r)&=\varphi f^r(x_1\otimes\cdots\otimes x_r)\\&=f(x_1)\wedge\cdots\wedge f(x_r)\end{aligned}\tag{1·40}$$

となる，この写像 $\Lambda^r(f)$ を f の r-次の**外積べき**という．

W を V の r $(<n)$ 次元のベクトル部分空間として，V の基 $\{e_1,\cdots,e_n\}$ を $\{e_1,\cdots,e_r\}$ が W の基をなしているようにとっておく．単純な r-ベクトル $\xi=e_1\wedge\cdots\wedge e_r$ は W に対して，スカラー因数を除いて一意に定まることは明らかである．任意の $x\in V$ は $\sum_{i=1}^{n}a_ie_i$ と表わされ，(1·32) を用いると

$$\xi\wedge x=\sum_{i=r+1}^{n}a_ie_1\wedge\cdots\wedge e_r\wedge e_i$$

であるから，$x\in W$ か否かと $\xi\wedge x=0$ か否かと同じことになる．

問 1 ベクトル $x_1,\cdots,x_r$ が一次独立であるための必要かつ十分な条件は

$$x_1\wedge x_2\wedge\cdots\wedge x_r\neq 0$$

であることである．

問 2 W_1 と W_2 を V の部分空間とし，その次元をそれぞれ r_1 と r_2 とする．ξ_1 と ξ_2 をそれぞれに対応する r_1-ベクトルと r_2-ベクトルとすれば，$W_1\subset W_2$ であるための必要かつ十分な条件は $\xi_2=\xi_1\wedge\eta$ であるような (r_2-r_1)-ベクトル η があることである．$W_1\cap W_2=0$ であるための必要かつ十分な条件は $\xi_1\wedge\xi_2\neq 0$ であって，このときに W_1 と W_2 が張る r_1+r_2 次元のベクトル部分空間に対応する (r_1+r_2)-ベクトルは $\xi_1\wedge\xi_2$ である．

1·4 外 形 式

関係式 (1·5) によって $V^r=V\otimes\cdots\otimes V$ の双対空間 $(V^r)^*$ は $V_r=V_r{}^0=V^*\otimes\cdots\otimes V^*$ と同型である．$\{e_1,\cdots,e_n\}$ を V の基，$\{e^1,\cdots,e^n\}$ をその双対基として $V^r\ni\xi=\sum a^{i_1\cdots i_r}e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_r}$, $V_r\ni\eta'=\sum b_{j_1\cdots j_r}e^{j_1}\otimes\cdots\otimes e^{j_r}$ の内積は (1·4) によると

$$\langle\xi,\eta'\rangle=\sum a^{i_1\cdots i_r}b_{i_1\cdots i_r}$$

となる．いま $x_\alpha=\sum a_\alpha{}^ie_i$, $u^\beta=\sum b_j{}^\beta e^j$, $\alpha,\beta=1,2,\cdots,r$ とすれば

$$\langle x_1\otimes\cdots\otimes x_r,u^1\otimes\cdots\otimes u^r\rangle$$

$$=\langle \sum a_1{}^{i_1}\cdots a_r{}^{i_r}\mathrm{e}_{i_1}\otimes\cdots\otimes\mathrm{e}_{i_r}, \sum b^1{}_{j_1}\cdots b^r{}_{j_r}\mathrm{e}^{j_1}\otimes\cdots\otimes\mathrm{e}^{j_r}\rangle$$
$$=\sum_{i_1,\cdots,i_r} a_1{}^{i_1}b^1{}_{i_1}a_2{}^{i_2}b^2{}_{i_2}\cdots a_r{}^{i_r}b^r{}_{i_r}$$

であるから，これは

$$\langle x_1\otimes\cdots\otimes x_r, u^1\otimes\cdots\otimes u^r\rangle=\langle x_1,u^1\rangle\cdots\langle x_r,u^r\rangle \tag{1·41}$$

が成り立つことを示している．

前節では $\Lambda^r(V)$ と $A(V^r)$ を同じものと見なしたが，ここでは区別して考え，$\Lambda^r(V)$ から $A(V^r)$ への同型対応を k とする．$\Lambda^r(V^*)$ の元は V の上の r 次の**外形式**または簡単に **r-形式**とよばれる．r 次の交代共変テンソル全体のつくる V_r のベクトル部分空間を $A(V_r)$ で表わして $\Lambda^r(V^*)$ から $A(V_r)$ への同型対応を $\bar{k}$ とする．$1\leqq r\leqq n$ であるとき

$$k(x_1\wedge\cdots\wedge x_r)=\frac{1}{r!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_r}(\mathrm{sgn}\sigma)\sigma(x_1\otimes\cdots\otimes x_r)$$

$$\bar{k}(u^1\wedge\cdots\wedge u^r)=\frac{1}{r!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_r}(\mathrm{sgn}\,\sigma)\sigma(u^1\otimes\cdots\otimes u^r)$$

であるから

$$\langle k(x_1\wedge\cdots\wedge x_r),\bar{k}(u^1\wedge\cdots\wedge u^r)\rangle$$
$$=\frac{1}{(r!)^2}\sum_{\sigma,\tau\in\mathfrak{S}_r}(\mathrm{sgn}\,\sigma)(\mathrm{sgn}\,\tau)\langle x_{\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes x_{\sigma(r)}, u^{\tau(1)}\otimes\cdots\otimes u^{\tau(r)}\rangle$$
$$=\frac{1}{(r!)^2}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_r}\mathrm{sgn}\,\sigma\sum_{\tau\in\mathfrak{S}_r}\mathrm{sgn}\,\tau\langle x_{\sigma(1)},u^{\tau(1)}\rangle\cdots\langle x_{\sigma(r)},u^{\tau(r)}\rangle$$
$$=\frac{1}{(r!)^2}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_r}\mathrm{sgn}\,\sigma|\langle x_{\sigma(\alpha)},u^\beta\rangle|=\frac{1}{r!}|\langle x_\alpha,u^\beta\rangle|$$

すなわち

$$\langle k(x_1\wedge\cdots\wedge x_r),\bar{k}(u^1\wedge\cdots\wedge u^r)\rangle=\frac{1}{r!}|\langle x_\alpha,u^\beta\rangle|$$

ここに $|\langle x_\alpha,u^\beta\rangle|$ は α 行 β 列の要素が $\langle x_\alpha,u^\beta\rangle$ である r 次の正方行列の行列式を表わす．$\Lambda^r(V)$ と $\Lambda^r(V^*)$ の基については

$$r!\langle k(\mathrm{e}_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{e}_{i_r}),\ \bar{k}(\mathrm{e}^{j_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{e}^{j_r})\rangle=\delta_{i_1\cdots i_r}^{j_1\cdots j_r} \tag{1·42}$$

が成り立つ．右辺の記号は**一般化された Kronecker のデルタ**といわれ

$$\delta^{j_1\cdots j_r}_{i_1\cdots i_r}=\begin{cases}\text{相異なる添字の集まりとしての } \{i_1,\cdots,i_r\} \\ \text{と } \{j_1,\cdots,j_r\} \text{ が一致し置換 } \begin{pmatrix} j_1\cdots j_r \\ i_1\cdots i_r \end{pmatrix} \text{ が} \\ \text{偶置換のとき } 1,\ \text{奇置換のとき } -1 \\ \text{その他の場合には } 0 \end{cases} \tag{1·43}$$

である．そこで $\Lambda^r(V)$ と $\Lambda^r(V^*)$ との内積を

$$\langle x_1\wedge\cdots\wedge x_r, u^1\wedge\cdots\wedge u^r\rangle=|\langle x_\alpha, u^\beta\rangle| \tag{1·44}$$

で定義することにより，(1·42) から $\Lambda^r(V)$ の双対空間 $(\Lambda^r(V))^*$ と $\Lambda^r(V^*)$ との間に同型的対応がつくことがわかる．$\Lambda(V)$ と同じように定義して得られる環 $\Lambda(V^*)$ を V の上の**外形式の代数**という．

次に V からベクトル空間 W への線型写像 $f: V\to W$ に対しては (1·9) によって双対写像 $f^*: W^*\to V^*$ が定まったが，前節に述べた $\Lambda^r(f)$: $\Lambda^r(V)\to\Lambda^r(W)$ の双対写像を考えてみよう．(1·44) を用いて

$$\begin{aligned}&\langle x_1\wedge\cdots\wedge x_r, (\Lambda^r(f))^*(w^1\wedge\cdots\wedge w^r)\rangle\\ &=\langle \Lambda^r(f)(x_1\wedge\cdots\wedge x_r), w^1\wedge\cdots\wedge w^r\rangle\\ &=\langle f(x_1)\wedge\cdots\wedge f(x_r), w^1\wedge\cdots\wedge w^r\rangle\\ &=|\langle f(x_\alpha), w^\beta\rangle|=|\langle x_\alpha, f^*w^\beta\rangle|\\ &=\langle x_1\wedge\cdots\wedge x_r, f^*(w^1)\wedge\cdots\wedge f^*(w^r)\rangle\\ &=\langle x_1\wedge\cdots\wedge x_r, \Lambda^r(f^*)(w^1\wedge\cdots\wedge w^r)\rangle\end{aligned}$$

であるから，関係式

$$(\Lambda^r(f))^*=\Lambda^r(f^*),\qquad f\in\mathfrak{L}(V;W) \tag{1·45}$$

が成り立つ．

任意の元 $\xi\in\Lambda^r(V)$ と $\eta'\in\Lambda^s(V^*)$ に対して，$r\leqq s$ のとき**左内積** $\xi\rfloor\eta'\in\Lambda^{s-r}(V^*)$ を，$r\geqq s$ のとき**右内積** $\xi\lfloor\eta'\in\Lambda^{r-s}(V)$ をそれぞれ

$$\langle\zeta, \xi\rfloor\eta'\rangle=\langle\zeta\wedge\xi, \eta'\rangle,\qquad \zeta\in\Lambda^{s-r}(V) \tag{1·46}$$

$$\langle\xi\lfloor\eta', \zeta'\rangle=\langle\xi, \eta'\wedge\zeta'\rangle,\qquad \zeta'\in\Lambda^{r-s}(V^*) \tag{1·47}$$

で定義する．$\{e_1,\cdots,e_n\}$ を V の基，$\{e^1,\cdots,e^n\}$ をその双対基として ξ と η' が

$$\xi=\frac{1}{r!}\sum a^{i_1\cdots i_r}\mathrm{e}_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{e}_{i_r}$$

$$\eta'=\frac{1}{s!}\sum b_{j_1\cdots j_s}\mathrm{e}^{j_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{e}^{j_s}$$

と表わされたとする．係数 $a^{i_1\cdots i_r}, b_{j_1\cdots j_s}$ は添字について交代にとってあるものとする．(1·44) によって

$$\langle\xi, \mathrm{e}^{j_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{e}^{j_r}\rangle=\frac{1}{r!}\sum a^{i_1\cdots i_r}\delta^{j_1\cdots j_r}_{i_1\cdots i_r}=a^{j_1\cdots j_r} \tag{1·48}$$

である．したがって $r<s$ のときには

$$\langle\mathrm{e}_{j_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{e}_{j_{s-r}}, \xi\rfloor\eta'\rangle=\frac{1}{r!}\sum a^{i_1\cdots i_r}\langle\mathrm{e}_{j_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{e}_{j_{s-r}}\wedge\mathrm{e}_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{e}_{i_r}, \eta'\rangle$$

$$=\frac{1}{r!}\sum a^{i_1\cdots i_r}b_{j_1\cdots j_{s-r}i_1\cdots i_r}$$

であるから，左内積は

$$\xi\rfloor\eta'=\frac{1}{(s-r)!\,r!}\sum_j\sum_i a^{i_1\cdots i_r}b_{j_1\cdots j_{s-r}i_1\cdots i_r}\mathrm{e}^{j_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{e}^{j_{s-r}} \tag{1·49}$$

となる．

$\Lambda^r(V)$ から $\Lambda^{n-r}(V^*)$ への線型写像 $\varphi:\Lambda^r(V)\to\Lambda^{n-r}(V^*)$ を

$$\varphi(\xi)=\xi\rfloor\mathrm{e}^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{e}^n=\frac{1}{(n-r)!\,r!}\sum_j\sum_i a^{i_1\cdots i_r}\delta^{1\cdots n-r\cdots n}_{j_1\cdots j_{n-r}i_1\cdots i_r}\mathrm{e}^{j_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{e}^{j_{n-r}} \tag{1·50}$$

で定義すると，この右辺は φ が同型写像であることを示している．

問 1　ξ が単純であるとき $\varphi(\xi)$ もまた単純である．

問 2　$(n-1)$-ベクトルはつねに単純である．

1·5 内　　積

ここでは体 F は実数体にかぎらず複素数体の場合も含めることにする．$V\times V$ から F への写像 $\varphi: V\times V\to F$ が次の条件をみたすものとする．

1) $\varphi(x, y)=\overline{\varphi(y, x)}$

2) $\varphi(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2, y)=\alpha_1\varphi(x_1, y)+\alpha_2\varphi(x_2, y), \qquad \alpha_1, \alpha_2\in F$

3) $\varphi(x, x)\geqq 0$ で，$\varphi(x, x)=0$ は $x=0$ のときにかぎる．

この条件 2) から任意の元 $y\in V$ に対応して V^* の元 y' を関係式

$$\langle x, y'\rangle=\varphi(x, y) \tag{1·51}$$

で定義する．この対応 $V\to V^*$ は**共役線型**である．すなわち $\beta_1 y_1+\beta_2 y_2$ に対応するのは $\bar{\beta}_1 y_1'+\bar{\beta}_2 y_2'$ である．3) と $\dim V=\dim V^*$ であるから，この対応は同型的である．このような写像 φ を V の **内積**という．この内積から V^r の内積 φ^r を同じように条件 1), 2), 3) をみたし

$$\varphi^r(x_1\otimes\cdots x_r, y_1\otimes\cdots\otimes y_r)=\varphi(x_1, y_1)\varphi(x_2, y_2)\cdots\varphi(x_r, y_r)$$

であるように定義できる．

問 V の基 $\{\mathrm{e}_1, \cdots, \mathrm{e}_n\}$ をとり $\varphi(\mathrm{e}_i, \mathrm{e}_j)=\xi_{ij}$ とおけば

$$\varphi(\sum\alpha^i\mathrm{e}_i, \sum\beta^j\mathrm{e}_j)=\sum\alpha^i\overline{\beta^j}\xi_{ij}$$

$$\varphi^r(\sum\alpha^{i_1\cdots i_r}\mathrm{e}_{i_1}\otimes\cdots\otimes\mathrm{e}_{i_r}, \sum\beta^{j_1\cdots j_r}\mathrm{e}_{j_1}\otimes\cdots\otimes\mathrm{e}_{j_r})=\sum_{i,j}\alpha^{i_1\cdots i_r}\overline{\beta^{j_1\cdots j_r}}\xi_{i_1j_1}\cdots\xi_{i_rj_r}$$

である．φ^r が V^r の内積を与えることを証明せよ．

第 2 章　微分可能多様体

2·1　微分可能多様体

ある集合 X が**位相空間**であるというのは X の各点 x に x の**基本近傍**とよばれる X の部分集合 $V(x)$ が少なくとも一つあって次の公理

Ⅰ　各近傍 $V(x)$ は x を含む．

Ⅱ　x の任意の二つの近傍 $V_1(x), V_2(x)$ の共通部分 $V_1(x)\cap V_2(x)$ はある近傍 $V(x)$ を含む．

Ⅲ　$V(x)\ni y$ ならば $V(y)\subset V(x)$ となる y の近傍 $V(y)$ がある．

をみたしているときにいう．点 x の（基本）近傍の全体を x の**近傍系**といい，近傍の全体をこの空間の近傍系という．X に二つの近傍系 $\mathfrak{V}$ と $\mathfrak{U}$ とがあって各点 x に対して，$\mathfrak{V}$ の任意の近傍 $V(x)$ は $\mathfrak{U}$ のある近傍 $U(x)$ を含み，$\mathfrak{U}$ の任意の近傍 $U(x)$ は $\mathfrak{V}$ のある近傍 $V(x)$ を含むとき，この近傍系 $\mathfrak{V}$ と $\mathfrak{U}$ との関係は同値関係である．よってこのようなとき近傍系 $\mathfrak{U}$ と $\mathfrak{V}$ は同値であるという．同値な近傍系によって定まる位相空間はつぎの意味で同じものとみなすことができる．

X の部分集合 A の点 x は $V(x)\subset A$ である近傍 $V(x)$ をもつとき点 x を A の内点といい，A の各点が**内点**であるときに A は**開集合**といわれる．A の内点全体からなる A の部分集合を A の**内部**という．内部はつねに開集合である．開集合の補集合を**閉集合**という．集合 A の補集合の内部の補集合を A の**閉包**（閉被）といい $\bar{A}$ で表わす．$x\in\bar{A}$ であることと，任意の近傍 $V(x)$ に対して $V(x)\cap A\neq\phi$（空集合）であることと同じである．$x\in\bar{A}$ のとき x を A の**触点**という．X の開集合の族 $\{U_\lambda\}$ があって，任意の点 $x\in X$ について x を含むこの族の開集合が x における基本近傍と同値であるとき，この族は位相空間 X の基をなすという．可算な基をもつとき X は**完全可分**であるという．

X の部分集合 A に対してその基本近傍系を X の基本近傍系から $A\cap V(x)$

によって定義したとき，このようにして A において定まった位相空間を X の**部分空間**という．位相空間 X から Y への写像 f は Y の任意の開集合の逆像がつねに開集合のとき**連続**であるという．さらに $f(X)=Y$ である 1-1 写像で f の逆写像 f^{-1} が連続のとき f は**位相写像**であるという．

部分集合の族 $\{A_\alpha\}$ は $\bigcup A_\alpha=X$ であるとき X を**被覆**するという．位相空間 X は開集合からなる任意の被覆系に対して適当に有限個の要素を選び，これが X を被覆するようにできるとき**コンパクト**であるという．

位相空間 X の各点 x が n 次元 Euclid 空間の開集合と同位相な近傍をもつとき n 次元の**位相多様体**という．n 次元 Euclid 空間の開集合から m 次元 Euclid 空間への写像 f は，それぞれ Descartes 座標 $(x^1,\cdots,x^n)$ と $(y^1,\cdots,y^m)$ を用いて

$$y^\alpha=f^\alpha(x^i)=f^\alpha(x^1,\cdots,x^n),\qquad \alpha=1,2,\cdots,m \tag{2·1}$$

と表わされたとき，f^α が定義域のすべての点で r 回連続微分可能 $(1\leqq r\leqq\infty)$ または解析的であるならば C^r 級または解析的であるという．点 x での f の函数行列

$$\left(\frac{\partial f^\alpha}{\partial x^i}\right)=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f^1}{\partial x^1}\cdots\dfrac{\partial f^1}{\partial x^n}\\ \vdots \\ \dfrac{\partial f^m}{\partial x^1}\cdots\dfrac{\partial f^m}{\partial x^n}\end{pmatrix} \tag{2·2}$$

の階数が $\min(m,n)$ であるとき，f はこの点で正則であるという．

位相多様体 X が連結であるとし，開集合からなる被覆系 $\{U_\lambda\}$ が，その各開集合 U_λ は n 次元 Euclid 空間の開集合 E_λ と位相写像 $u_\lambda: U_\lambda\to E_\lambda$ によって同位相であるとする．$U_\lambda\cap U_\mu\neq\phi$ ならば $u_\lambda(U_\lambda\cap U_\mu)$ から $u_\mu(U_\lambda\cap U_\mu)$ への位相写像 $u_\mu\cdot u_\lambda{}^{-1}$ がつねに C^r 級であるとき $\mathfrak{S}=\{(U_\lambda,u_\lambda)\}$ を X の **C^r 級座標近傍系**という．U_λ を座標近傍，点 $x\in U_\lambda$ に対して $u_\lambda(x)$ の座標 x^i をその**局所座標**という．X の二つの C^r 級座標近傍系は両者をいっしょにしたものがまた C^r 級座標近傍系をなすとき C^r 級同値であるという．位相多様体 X に C^r 級座標近傍系の同値な集まりが与えられたとき X を基礎空

間とする C^r **級微分可能多様体**が定義されたという．上に述べた $u_\mu\cdot u_\lambda^{-1}$ がつねに解析的として同様に定義されたものを解析的多様体といい，簡単に C^ω 級微分可能多様体とよんで同じ扱いをすることもある．定義から $r\geqq s\geqq 1$ なる自然数 s をとると，C^r 級の微分可能多様体 X は C^s 級の微分可能多様体を定めることは明らかである．

$U_\lambda\cap U_\mu \neq \phi$ のとき $u_\mu\cdot u_\lambda^{-1}$ が $u_\lambda(U_\lambda\cap U_\mu)$ で $y^i=y^i(x^1,\cdots,x^n), i=1,\cdots,n$ と表わされ，$u_\lambda\cdot u_\mu^{-1}$ が $u_\mu(U_\lambda\cap U_\mu)$ で $x^i=x^i(y^1,\cdots,y^n), i=1,\cdots,n$ と表わされたとするとこれらは互に逆変換であるから $\left|\dfrac{\partial y^i}{\partial x^j}\right| \neq 0$ となることは明らかである．したがって $u_\lambda\cdot u_\lambda^{-1}$ は至るところ正則である．この $u_\mu\cdot u_\lambda^{-1}$ を**座標変換**とよぶ．座標近傍系 $\mathfrak{S}=\{(U_\mu, u_\lambda)\}$ の任意の座標変換の函数行列式がつねに正であるとき $\mathfrak{S}$ は向きをもつという．他の座標近傍系 $\mathfrak{S}'=\{(U_\alpha', u_\alpha')\}$ も向きをもつとする．明らかに $U_\lambda\cap U_\alpha' \neq \phi$ のとき $u_\alpha'\cdot u_\lambda^{-1}$ の函数行列式はこのような組に対して，つねに正であるか負であるかである．前者ならば $\mathfrak{S}$ と $\mathfrak{S}'$ は同じ向きをもつという．この関係で向きをもつ座標近傍系を類別すれば高々二つに分かれる．Euclid 空間の折返し変換の一つを ρ として $u_\lambda'=\rho\cdot u_\lambda$ として向きをもつ $\mathfrak{S}$ から $\mathfrak{S}'$ をつくれば，$\mathfrak{S}'$ も向きをもち $\mathfrak{S}'$ は $\mathfrak{S}$ と異なる類に入ることは明らかである．よって類の個数は 0 か 2 である．二つあるとき各類は X に**向き**を定めるという．

Y を C^s 級座標近傍系 $\{(V_\alpha, v_\alpha)\}$ をもつ m 次元微分可能多様体として，X の開集合 G から Y への写像 $f: G\to Y$ が G の点 x において座標近傍 $U_\lambda\ni x, V_\alpha\ni f(x)$ を用いたとき，$u_\lambda(x)$ の適当な近傍から $v_\alpha(f(x))$ の近傍への写像 $v_\alpha\cdot f\cdot u_\lambda^{-1}$ が点 $u_\lambda(x)$ で C^t **級微分可能** $(1\leqq t\leqq r, s)$ であるならば，f は点 x において C^t 級微分可能であるという．同じく $v_\alpha\cdot f\cdot u_\lambda^{-1}$ が正則ならば f は点 x で正則であるという．これらの定義が近傍 U_λ, V_α のとり方に関係しないことは上に述べた座標変換がつねに正則であることから明らかである．f が G の各点で C^t 級のとき C^t 級微分可能であるという．f が X から Y の上への 1-1 写像で f と f^{-1} が共に C^t 級微分可能であるとき，f は C^t 級同型写像といい，X と Y は C^t 級同型であるという．以下では C^r

級微分可能多様体を単に **C^r 級多様体**とよぶことにしよう．

2·2 接空間

空間 X は n 次元の C^r 級多様体（$1\leqq r\leqq\infty$ または ω）として，X の開集合で定義された C^r 級微分可能な実数値函数全体のつくる族を $\mathfrak{F}$ で表わす．n 次元座標空間で i 番目の座標軸への射影を $p^i(x^1,\cdots,x^n)=x^i$ とすれば明らかに $p^i\cdot u_\lambda=u_\lambda{}^i$ は $\mathfrak{F}$ の元である．函数 $f,f_1,\cdots,f_m$ の定義域がある近傍 U を含み，そこで $f(x)=F(f_1(x),\cdots,f_m(x))$ となるような m 変数の C^t 級の函数 $F(y_1,\cdots,y_m)$ があるとき f は U で $f_1,\cdots,f_m$ に **C^t 級従属**であるといい，とくに F が代数函数ならば**代数的従属**であるという．明らかに座標近傍（U_λ,u_λ）をその定義域に含む函数 $f\in\mathfrak{F}$ は $u_\lambda{}^1,\cdots,u_\lambda{}^n$ に U_λ で C^r 級従属である．

定義域が点 x を含むような $\mathfrak{F}$ の元全体からなる $\mathfrak{F}$ の部分族を $\mathfrak{F}(x)$ で表わし，$\mathfrak{F}(x)\ni f_1,f_2$ がある近傍 $U\ni x$ で $f_1|U=f_2|U$ ならば $f_1\sim f_2$ と定義すればこれは一つの同値関係である．ただし，A を定義域とする写像 f に対してその定義域を部分集合 $B\subset A$ にちぢめてできる写像を $f|B$ で表わすことにした．この関係で $\mathfrak{F}(x)$ を類別したものを $\mathfrak{A}(x)$ とする．$\mathfrak{F}(x)\ni f$ の属する類を (f,x) で表わそう．任意の実数 a と (f,x) との積を (af,x) で，また (f_1,x) と (f_2,x) の和と積をそれぞれ f_1 と f_2 の定義域の共通部分に含まれる x の近傍 U をとり $(f_1,x)+(f_2,x)=(f_1|U+f_2|U,x)$, $(f_1,x)(f_2,x)=((f_1|U)(f_2|U),x)$ で定義できることは明らかである．このような算法をもった $\mathfrak{A}(x)$ は無限次元の実数体の上の環をなしている．$\mathfrak{A}(x)\ni(f,x),(f_1,x),\cdots,(f_m,x)$ に対し，f が x の適当な近傍で $f_1,\cdots,f_m$ に C^r 級または代数的従属であるとき，(f,x) は $(f_1,x),\cdot\cdot,(f_m,x)$ に C^r 級または代数的従属であるという．

X の点 x における**接ベクトル**とは $\mathfrak{A}(x)$（$r=1$ と考えてよろしい）の上の実数値線型函数 $\mathfrak{v}$ でつぎの条件をみたすものをいう：

$\mathfrak{A}(x)\ni(f,x)$ が $(f_1,x),\cdots,(f_m,x)$ に C^r 級従属で $f=F(f_1,\cdots,f_m)$ とすれば

$$\mathfrak{v}(f) \equiv \mathfrak{v}((f, x)) = \sum_{\alpha=1}^{m} \left(\frac{\partial F}{\partial y_\alpha} \right)_{y_\alpha = f_\alpha(x)} \mathfrak{v}(f_\alpha) \tag{2·3}$$

点 x の任意の座標近傍 (U, u) をとり，$\mathfrak{F}(x) \ni f, g$ が $f=F(u^1, \cdots, u^n), g=G(u^1, \cdots, u^n)$ と表わされるものとすれば

$$\begin{aligned}\mathfrak{v}(fg) &= \sum_i \left(\frac{\partial FG}{\partial x^i} \right)_{x^i = u^i(x)} \mathfrak{v}(u^i) \\ &= \sum_i \left(\frac{\partial F}{\partial x^i} G + F \frac{\partial G}{\partial x^i} \right)_{x^i = u^i(x)} \mathfrak{v}(u^i) = \mathfrak{v}(f) g(x) + f(x) \mathfrak{v}(g),\end{aligned}$$

すなわち

$$\mathfrak{v}(fg) \equiv \mathfrak{v}((f, x)(g, x)) = \mathfrak{v}(f) g(x) + f(x) \mathfrak{v}(g), \quad f, g \in \mathfrak{F}(x) \tag{2·4}$$

なる関係が成立する．X が解析的のときには (2·4) をみたす実数値線型函数は (2·3) をみたすことが証明できる．x での任意の接ベクトル $\mathfrak{v}_1, \mathfrak{v}_2$ に対して，$a_1\mathfrak{v}_1 + a_2\mathfrak{v}_2$ がまた接ベクトルであることは (2·3) の形から明らかである．点 x でのすべての接ベクトルは実数体上のベクトル空間をなす，これを $V_x = T_x(X)$ で表わし，x での X の**接空間**という．

点 x の近傍での局所座標 $u^1, \cdots, u^n$ をとると，任意の $\mathfrak{v} \in V_x$ は (2·3) により $\mathfrak{v}(u^i), i=1, 2, \cdots, n,$ の値で定まる．逆に $\mathfrak{v}(u^i) = b^i, i=1, 2, \cdots, n$ を与えれば $\mathfrak{v}$ が一意に定まるから，添字 j に対して

$$\mathfrak{v}(u^i) = \delta^i_j, \qquad i=1, 2, \cdots, n \tag{2·5}$$

である接ベクトルを $\partial/\partial u^j$ で表わそう．しかるとき次の定理を得る．

定理 2·1 $f \in \mathfrak{F}(x)$ が x の近傍の局所座標 $u^1, \cdots, u^n$ を用いて $f=F(u^1, \cdots, u^n)$ であり，$\mathfrak{v}$ を点 x での任意の接ベクトルとすると

$$\mathfrak{v} = \sum \mathfrak{v}(u^i) \frac{\partial}{\partial u^i} \tag{2·6}$$

$$\frac{\partial}{\partial u^i}(f) = \left(\frac{\partial F}{\partial x^i} \right)_{x^i = u^i(x)} \tag{2·7}$$

接ベクトル $\partial/\partial u^i$ が1次独立であることは明らかであるから

$$\dim T_x(X) = \dim X \tag{2·8}$$

V_x の双対空間 $V_x{}^*$ の元を共変接ベクトルという．任意の $(f, x) \in \mathfrak{A}(x)$ に

対して $(a_1\mathfrak{v}_1+a_2\mathfrak{v}_2)(f)=a_1\mathfrak{v}_1(f)+a_2\mathfrak{v}_2(f)$ であるから，f は $V_x{}^*$ の元を定める．このようにして得られる $\mathfrak{A}(x)$ から $V_x{}^*$ への自然な写像を $d:\mathfrak{A}(x)\to V_x{}^*$ で表わし $d((f,x))=df$ と書くことにして差支えないことは明らかである．(2·5) によって

$$\left\langle\frac{\partial}{\partial u^i},\ du^j\right\rangle=\delta_i^j \tag{2·9}$$

であるから $\{\partial/\partial u^1,\cdots,\partial/\partial u^n\}$ と $\{du^1,\cdots,du^n\}$ は V_x の基とその双対基をなしている．

定理 2·2 $f\in\mathfrak{F}(x)$ が x の近傍の局所座標 $u^1,\cdots,u^n$ を用いて $f=F(u^1,\cdots,u^n)$ であれば

$$df=\sum\left(\frac{\partial F}{\partial x^i}\right)_{x^j=u^j(x)}du^i \tag{2·10}$$

(証明) 定義と (2·7) により

$$df\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)=\frac{\partial}{\partial u^i}(f)=\left(\frac{\partial F}{\partial x^i}\right)_{x^j=u^j(x)}$$

であるからすぐ (2·10) が出る．(終)

Y を C^r 級多様体，φ を X の点 x の近傍から Y への C^r 級写像として $y=\varphi(x)$ とおく．任意の元 $(g,y)\in\mathfrak{A}(y)$ に対して，x の近傍の函数 $g\cdot\varphi\in\mathfrak{F}(x)$ で定まる元 $(g\cdot\varphi,x)\in\mathfrak{A}(x)$ を対応させると準同型な対応 $\varphi_x:\mathfrak{A}(y)\to\mathfrak{A}(x)$ が定まる．$V_x(X)$ の接ベクトル $\mathfrak{v}$ に対して $V_y(Y)$ での接ベクトル $\mathfrak{w}$ を

$$\mathfrak{w}(g)=\mathfrak{v}(g\cdot\varphi),\qquad g\in\mathfrak{F}(x) \tag{2·11}$$

で定めれば，線型写像 $\varphi_{*x}:V_x(X)\to V_y(Y)$ が $\mathfrak{w}=\varphi_{*x}\mathfrak{v}$ として定義される．これの双対写像を $\varphi^*{}_x:V_y{}^*(Y)\to V_x{}^*(X)$ とする．任意の $\mathfrak{v}\in V_x(X)$ と $g\in\mathfrak{F}(y)$ に対して，これらの定義から

$$\begin{aligned}\langle\mathfrak{v},d(\varphi_x(g,y))\rangle&=\mathfrak{v}(\varphi_x(g,y))=\mathfrak{v}(g\cdot\varphi)\\&=(\varphi_{*x}\mathfrak{v})(g)=\langle\varphi_{*x}\mathfrak{v},dg\rangle=\langle\mathfrak{v},\varphi^*{}_x dg\rangle\end{aligned}$$

であるので，公式

$$d\cdot\varphi_x=\varphi^*{}_x\cdot d \tag{2·12}$$

が成り立つ.

定理 2·3 X の点 x の近傍から Y への C^r 級写像 φ が x の近傍の局所座標 $u^1, \cdots, u^n$ と $y=\varphi(x)$ の近傍の局所座標 $v^1, \cdots, v^m$ を用いて $v^\alpha\cdot\varphi=\Phi^\alpha(u^1, \cdots, u^n)$ と表わされたとすれば

$$\varphi_{*x}\frac{\partial}{\partial u^i}=\sum\left(\frac{\partial\Phi^\alpha}{\partial x^i}\right)_{x^j=u^j(x)}\frac{\partial}{\partial v^\alpha} \tag{2·13}$$

$$\varphi^*{}_x dv^\alpha=\sum\left(\frac{\partial\Phi^\alpha}{\partial x^i}\right)_{x^j=u^j(x)}du^i \tag{2·13$'$}$$

(証明) 定義により, 任意の $g\in\mathfrak{F}(y)$ に対し $g=G(v^1, \cdots, v^m)$ とすると, (2·3) と (2·7) を用いて

$$\left(\varphi_{*x}\frac{\partial}{\partial u^i}\right)(g)=\frac{\partial}{\partial u^i}(g\cdot\varphi)=\frac{\partial}{\partial u^i}G(\Phi^1, \cdots, \Phi^m)$$

$$=\sum_\alpha\left(\frac{\partial G}{\partial y^\alpha}\right)_{y^\beta=v^\beta(y)}\frac{\partial}{\partial u^i}\Phi^\alpha$$

$$=\sum_\alpha\left(\frac{\partial G}{\partial y^\alpha}\right)_{y^\beta=v^\beta(y)}\left(\frac{\partial\Phi^\alpha}{\partial x^i}\right)_{x^j=u^j(x)}$$

$$=\sum_\alpha\left(\frac{\partial\Phi^\alpha}{\partial x^i}\right)_{x^j=u^j(x)}\frac{\partial}{\partial v^\alpha}(g)$$

である. (2·13)$'$ は (2·13) の双対写像として (1·9) から明らかである. (終)

定理 2·4 X, Y, Z を C^r 級多様体, X の点 x の近傍から Y への C^r 級写像 φ, φ の値域を含む $y=\varphi(x)$ の近傍から Z への C^r 級写像 ψ が与えられてるとき

$$(\psi\cdot\varphi)_{*x}=\psi_{*y}\cdot\varphi_{*x} \tag{2·14}$$

$$(\psi\cdot\varphi)^*{}_x=\varphi^*{}_x\cdot\psi^*{}_y \tag{2·14$'$}$$

(証明) 前定理の記号をそのまま利用し, $\psi(y)$ の近傍での局所座標を $w^1, \cdots, w^l$ を用いて $w^\lambda\cdot\psi=\Psi^\lambda(v^1, \cdots, v^m)$ と表わされたとすれば, $w^\lambda\cdot\psi\cdot\varphi=\Psi^\lambda(v^\alpha\cdot\varphi)=\Psi^\lambda(\Phi^\alpha(u^i))$ であるから

$$(\psi\cdot\varphi)_{*x}\frac{\partial}{\partial u^i}=\sum_\lambda\left(\frac{\partial\Psi^\lambda(\Phi^\alpha)}{\partial x^i}\right)_{x^j=u^j(x)}\frac{\partial}{\partial w^\lambda}$$

$$=\sum_{\alpha}\sum_{\lambda}\left(\frac{\partial \Phi^{\alpha}}{\partial x^{i}}\right)_{x^{j}=u^{j}(x)}\left(\frac{\partial \Psi^{\lambda}}{\partial y^{\alpha}}\right)_{y^{\beta}=v^{\beta}(y)}\frac{\partial}{\partial w^{\lambda}}$$

$$=\sum_{\alpha}\left(\frac{\partial \Phi^{\alpha}}{\partial x^{i}}\right)_{x^{j}=u^{j}(x)}\psi_{*y}\frac{\partial}{\partial v^{\alpha}}$$

$$=\psi_{*y}\left(\sum\left(\frac{\partial \Phi^{\alpha}}{\partial x^{i}}\right)_{x^{j}=u^{j}(x)}\frac{\partial}{\partial v^{\alpha}}\right)=\psi_{*y}\left(\varphi_{*x}\frac{\partial}{\partial u^{i}}\right)$$

(1·10) を用いれば (2·14)′ を (2·14) から導くことができる．(終)

2·3　部分多様体と多様体の積

C^r 級多様体 X が C^s 級多様体 Y $(r\leqq s)$ の C^r 級**部分多様体**であるとは X から Y の中への C^r 級の 1–1 写像 $\varphi: X\to Y$ があって，各点 $x\in X$ に対して $\varphi_{*x}: T_x(X)\to T_y(Y)$ が中への 1–1 対応であるとき，このような φ と X の組 (φ, X) のことをいう．

例 1　X の任意の開集合 G に対して X の座標近傍と G との共通部分を座標近傍とすれば G は X と同じ級の多様体となる．G から X の写像として恒等写像をとれば，この多様体は X の部分多様体をなす．これを X の**開部分多様体**という．

例 2　Y の部分多様体 (φ, X) は $\varphi(X)$ が Y の閉集合で，任意の点 $x\in X$ に対して $y=\varphi(x)$ の適当な座標近傍とその局所座標 $v^1,\cdots,v^m$ で $v^{n+1}=\cdots=v^m=0$ となる点の軌跡が $\varphi(X)$ とその座標近傍の共通部分と一致するとき，(φ, X) を Y の**閉部分多様体**という．例えば3次元 Euclid 空間内の閉曲面とよばれているものはこのような部分多様体である．

例 3　二つの円の直積に同位相な曲面を**輪環面** (torus) という．これは mod 1 の実数 x と y の組 (x, y) を座標として定義できる．数直線 R をこの曲面の中に $\varphi(t)=(at, bt)$, $-\infty<t<+\infty$ で写像する．a と b は比の値が無理数であるような実数とする．(φ, R) は部分多様体であるが，$\varphi(R)$ は稠密な部分集合となるから閉部分多様体とはならない．

Y の部分多様体 (φ, X) は φ が X と $\varphi(X)$ との間の位相的写像であるとき**正則な部分多様体**とよばれる．

定理 2·5　Y の部分多様体 (φ, X) が正則であるための必要かつ十分な条件はそれが Y のある開部分多様体の閉部分多様体であることである．

(証明) (φ, X) が正則であるとする．任意の点 x_0 と $y_0=\varphi(x_0)$ の座標近傍 U_0, V_0 をとり，$u^1,\cdots,u^n$ と $v^1,\cdots,v^m$ をその局所座標系とする．$\varphi(U_0)\subset V_0$ としてよろしい．$\varphi(U_0)$ は $\varphi(X)$ の開部分集合であるから $V_0\cap\varphi(X)=\varphi(U_0)$ として差支えない．$v^\alpha\cdot\varphi\in\mathfrak{F}(x)$ が $u^1,\cdots,u^n$ を用いて $v^\alpha\cdot\varphi=\Phi^\alpha(u^1,\cdots,u^n)$ であるとする．函数行列 $\left(\dfrac{\partial\Phi^\alpha}{\partial x^i}(x^1,\cdots,x^n)\right)$ の階数は(2·13)により $x^i=u^i(x)$, $x\in U_0$ で n である．U_0 を十分小さくとれば U_0 の n 次元 Euclid 空間内の像で至るところ $\left|\dfrac{\partial\Phi^j}{\partial x^i}\right|\neq 0$ としてよろしい．$V_1\subset V_0$ でかつ $V_1\cap\varphi(X)=\varphi(U_0)$ である近傍 V_1 を適当にとって m 次元 Euclid 空間内での C^r 級写像

$$\begin{cases} y^r=\Phi^i(\bar{y}^1,\cdots,\bar{y}^n), & i=1,2,\cdots,n \\ y^{n+p}=\bar{y}^{n+p}+\Phi^{n+p}(\bar{y}^1,\cdots,\bar{y}^n), & p=1,2,\cdots,m-n \end{cases}$$

が V_1 の像で定義され同型的であるようにできる．これから V_1 での局所座標 $\bar{v}^1,\cdots,\bar{v}^m$ を

$$\begin{cases} v^i=\Phi^i(\bar{v}^1,\cdots,\bar{v}^n) \\ v^{n+p}=\bar{v}^{n+p}+\Phi^{n+p}(\bar{v}^1,\cdots,\bar{v}^n) \end{cases}$$

によって定義すると，$\varphi(X)\cap V_1$ では $v^\alpha\cdot\varphi=\Phi^\alpha(u^1,\cdots,u^n)$ であるから，$\bar{v}^{n+1}=\cdots=\bar{v}^m=0$ となる．このような V_1 を $\varphi(X)$ の各点でとりその和集合を G とすると，(φ, X) は開部分多様体 G の閉部分多様体である．$\varphi(X)$ が G の閉部分集合，すなわち $\overline{\varphi(X)}\cap G=\varphi(X)$ をいえばよろしい．$y_1\in\overline{\varphi(X)}\cap G$ とすれば $y_1\in V_1(y_0)$, $y_0=\varphi(x_0)$ であるような上記の x_0, y_0, U_0, V_1 がある．しかるに V_1 の中では $\varphi(X)\cap V_1$ は相対的に閉じているから $y_1\in\varphi(X)$．十分なることの証明は容易であるから略する．(終)

(φ, X) を Y の部分多様体とする．X で発散する点列 $\{x_\lambda\}, \lambda=1,2,\cdots$ でしかも Y の点列 $\{y_\lambda=\varphi(x_\lambda)\}$ が y に収束するとき，このような点 y の集合を φ の極限集合といい，$\mathrm{Lim}(\varphi)$ で表わそう．

定理 2·6 Y の部分多様体 (φ, X) が正則であるための必要かつ十分な条件は $\varphi(X)\cap\mathrm{Lim}(\varphi)=\phi$ であることである．

(証明は省略する.)

n 次元の C^r 級多様体 ($r \leqq \infty$) が各座標近傍に対して，これと空でない共通部分をもつ座標近傍の個数が有界である可算な座標近傍系をもつならば，$2n+1$ 次元の Euclid 空間の正則な C^r 級部分多様体と C^r 級同型であることを H. Whitney (1936年) が証明して，抽象的に定義した多様体が Euclid 空間内の超曲面とみなしても構わないことを示した．さらにコンパクトなときには，この超曲面がその上の任意の点の近傍で Descartes 座標間の代数的な関係式によって規定されるようにできることが J. Nash (1952 年) によって証明せられている.

二つの C^r 級多様体 X と X' の座標近傍系を $\mathfrak{S}=\{(U_\lambda, u_\lambda)\}, \mathfrak{S}'=\{(U_\alpha', u_\alpha')\}$ とし，$\dim X=n$, $\dim X'=n'$ とする．位相空間の積 $X\times X'$ に近傍の集まり $\{U_{\lambda\alpha}=U_\lambda\times U_\alpha'\}$ を考えれば，これは $X\times X'$ の開被覆である．$U_{\lambda\alpha}$ から $n+n'$ 次元 Euclid 空間の開集合への位相写像 $u_{\lambda\alpha}''(x, x')=(u_\lambda(x), u'_\alpha(x'))$ は，$U_\lambda\cap U_\mu \neq \phi$, $U_\alpha'\cap U_\beta' \neq \phi$ ならば

$$u''_{\mu\beta}\cdot u''_{\lambda\alpha}{}^{-1}(x, x')=(u_\mu\cdot u_\lambda{}^{-1}(x), u_\beta'\cdot u_\alpha'{}^{-1}(x'))$$

であるから，座標近傍系 $\mathfrak{S}''=\{(U_\lambda\times U_\alpha', u''_{\lambda\alpha})\}$ は $X\times X'$ に $n+n'$ 次元の C^r 級微分可能多様体を定義する．これを多様体 X と X' との積という.

定理 2·7　X, Y, Z を C^r 級多様体，X の点 x_0 の近傍から Y, Z への C^r 級写像 φ, ψ が与えられているとする．x_0 の近傍から $Y\times Z$ への写像 $\chi, \varphi_{z_0}, \psi_{y_0}$, $y_0=\varphi(x_0)$, $z_0=\psi(x_0)$ をそれぞれ $\chi(x)=(\varphi(x), \psi(x))$, $\varphi_{z_0}(x)=(\varphi(x), z_0)$, $\psi_{y_0}(x)=(y_0, \psi(x))$ で定義すれば

$$\chi_{*x_0}=(\varphi_{z_0})_{*x_0}+(\psi_{y_0})_{*x_0} \tag{2·15}$$

$$\chi^*{}_{x_0}=(\varphi_{z_0})^*{}_{x_0}+(\psi_{y_0})^*{}_{x_0} \tag{2·15$'$}$$

(証明)　点 x_0, y_0, z_0 の近傍での局所座標系をそれぞれ $(u^1, \cdots, u^n)$, $(v^1, \cdots u^m)$, $(w^1, \cdots, w^l)$ として

$$v^\alpha\cdot\varphi=\Phi^\alpha(u^1, \cdots, u^n), \qquad w^\lambda\cdot\psi=\Psi^\lambda(u^1, \cdots, u^n)$$

とおけば，$v^1, \cdots, v^m, w^1, \cdots, w^l$ を (y_0, z_0) の近傍での局所座標とみて

$$v^\alpha\cdot\chi=v^\alpha\cdot\varphi_{z_0}=\Phi^\alpha(u^1, \cdots, u^n), \qquad v^\alpha\cdot\psi_{y_0}=v^\alpha(y_0)$$

$$w^\lambda\cdot\chi=w^\lambda\cdot\psi_{y_0}=\Psi^\lambda(u_1,\cdots,u^n),\qquad w^\lambda\cdot\varphi_{z_0}=w^\lambda(z_0)$$

であるから (2·13) によって

$$\chi_{*x_0}\frac{\partial}{\partial u^i}=\sum\left(\frac{\partial\Phi^\alpha}{\partial x^i}\right)_{x^j=u^j(x_0)}\frac{\partial}{\partial v^\alpha}+\sum\left(\frac{\partial\Psi^\lambda}{\partial x^i}\right)_{x^j=u^j(x_0)}\partial w^\lambda$$

$$=(\varphi_{z_0})_{*x_0}\frac{\partial}{\partial u^i}+(\psi_{y_0})_{*x_0}\frac{\partial}{\partial u^i}.$$

よって (2·15) が証明された．後半も同じである．(終)

2·4 接テンソル・バンドル

X は n 次元の連結な C^r 級多様体であるとし，実数体上の n 次元ベクトル空間 $\tilde{V}$ の上のテンソル空間（重さをもつ場合も含める）の一つを $\tilde{Y}$ とする．任意の点 $x\in X$ での接空間 V_x は $\tilde{V}$ と同型であるから $\tilde{Y}$ に対応する V_x の上のテンソル空間を $Y(x)$ として集合

$$Z=\bigcup_{x\in X}Y(x)$$

を考える．これを C^{r-1} 級多様体にしよう．ただし $r\geqq 2$ とする．

X の任意の座標近傍 U とその局所座標を $u^1,\cdots,u^n$ とすれば，$\left\{\frac{\partial}{\partial u^1}(x),\cdots,\frac{\partial}{\partial u^n}(x)\right\}$ と $\{du^1(x),\cdots,du^n(x)\}$ は V_x の基とその双対基となる．これらをこの座標系に関する**自然基**という．$\tilde{V}$ に定まった基 $\{\tilde{e}_1,\cdots,\tilde{e}_n\}$ とその双対基 $\{\tilde{e}^1,\cdots,\tilde{e}^n\}$ をとっておく．任意の点 $x\in U$ で同型対応

$$\psi_{U,x}:\tilde{V}\to V_x \tag{2·16}$$

を $\psi_{U,x}(\tilde{e}_i)=\frac{\partial}{\partial u^i}(x)$ で定義し，第1章 1·2 の考察でこれから定まる $\tilde{Y}$ から $Y(x)$ への同型対応を

$$\varphi_{U,x}:\tilde{Y}\to Y(x) \tag{2·17}$$

とし，これによって $U\times\tilde{Y}$ から Z の中への 1-1 対応

$$\varphi_U:U\times\tilde{Y}\to\bigcup_{x\in A}Y(x) \tag{2·18}$$

を $\varphi_U(x,y)=\varphi_{U,x}(y), y\in\tilde{Y}$ で定める．つまり $\varphi_{U,x}$ によって対応するテンソルはそれぞれの基と双対基についての成分が一致するように対応づけるのである．

X の開部分集合 G で定義された C^t 級実数値函数 f に対して，$G \cap U$ での C^{t-1} 級実数値函数 $\dfrac{\partial f}{\partial u^i}$ を

$$\frac{\partial f}{\partial u^i}(x) = \frac{\partial}{\partial u^i}(x)(f) \qquad x \in G \cap U \tag{2·19}$$

で定義する．

$U \cap V \neq \phi$ である他の座標近傍 V をとりその局所座標を $v^1, \cdots, v^n$ とする．V に対応する写像を

$$\varphi_V : V \times \widetilde{Y} \to \bigcup_{x \in V} Y(x)$$

として $U \cap V \ni x$ に対して Y の同型写像

$$g_{VU}(x) = \varphi_{V,x}{}^{-1} \cdot \varphi_{U,x} \tag{2·20}$$

を考えると，これは $\widetilde{V}$ の上の同型写像

$$h_{VU}(x) = \psi_{V,x}{}^{-1} \cdot \psi_{U,x}$$

に $\widetilde{Y}$ で対応するものである．$\widetilde{Y} \subset \widetilde{V}^r{}_s$ ならば $g_{VU}(x) = (h_{VU}(x))^r{}_s | \widetilde{Y}$ であることは明らかである．さて (2·6) によると

$$\psi_{U,x}(\widetilde{\mathrm{e}}_i) = \frac{\partial}{\partial u^i}(x) = \sum \frac{\partial v^j}{\partial u^i}(x) \frac{\partial}{\partial v^j}(x) = \sum \frac{\partial v^j}{\partial u^i}(x) \psi_{V,x}(\widetilde{\mathrm{e}}_j)$$

であるから

$$h_{VU}(x)(\widetilde{\mathrm{e}}_i) = \sum \frac{\partial v^j}{\partial u^i}(x) \widetilde{\mathrm{e}}_j, \quad (h_{VU}(x)^{-1})^*(\widetilde{\mathrm{e}}^i) = \sum \frac{\partial u^i}{\partial v^j}(x) \widetilde{\mathrm{e}}^j \tag{2·21}$$

である．この形から 1·2 の計算に従って $g_{VU}(x)$ の形をそれぞれに応じて定めることができる．例えば $\widetilde{Y} = \widetilde{V}_1{}^1$ のとき

$$g_{VU}(x)(\widetilde{\mathrm{e}}_i \otimes \widetilde{\mathrm{e}}^j) = \sum \frac{\partial v^k}{\partial u^i}(x) \frac{\partial u^j}{\partial v^h}(x) \widetilde{\mathrm{e}}_k \otimes \widetilde{\mathrm{e}}^h \tag{2·22}$$

となる．したがって $y = \sum y_j{}^i \widetilde{\mathrm{e}}_i \otimes \widetilde{\mathrm{e}}^j$, 　$g_{VU}(x) y = y' = y'_j{}^i \widetilde{\mathrm{e}}_i \otimes \widetilde{\mathrm{e}}^j$ とすれば

$$y'_h{}^k = \sum \frac{\partial v^k}{\partial u^i}(x) \frac{\partial u^j}{\partial v^h}(x) y_j{}^i \tag{2·23}$$

である．

$\widetilde{Y}$ の同型的写像の全体のつくる変換群 $L(\widetilde{Y})$ は自然な方法で解析的な連続

変換群をなしているが (2·21) と g_{VU} と h_{VU} の関係から

$$g_{VU} : U \cap V \to L(\tilde{Y}) \tag{2·24}$$

なる写像は C^{r-1} 級の写像であることがわかる.

さて Z はこれまで単なる集合にすぎなかったが, Z から X の上への写像

$$\pi : Z \to X \tag{2·25}$$

を $\pi(z)=x, z \in Y(x)$ と定義して, Z の部分集合 A が開集合であるとは任意の座標近傍 U について $\varphi_U{}^{-1}(A \cap \pi^{-1}(U))$ が $U \times \tilde{Y}$ の開集合であるときだと定義すれば, Z が Hausdorff 空間となることを容易に証明することができる. 位相空間 X_1 と X_2 の積 $X_1 \times X_2$ から X_1 と X_2 への自然な写像をそれぞれ p と q で表わし, 解析的多様体としての $\tilde{Y}$ の座標近傍 G とその局所座標を $\xi_1, \cdots, \xi_m$ として Z の近傍 $\varphi_U(U \times G)$ での局所座標を $u^i \cdot p \cdot \varphi_U{}^{-1}$, $\xi_\alpha \cdot q \cdot \varphi_U{}^{-1}, i=1, \cdots, n, \alpha=1, \cdots, m$ で定めれば, 上に述べたことから Z は C^{r-1} 級多様体になり, 写像 π, φ_U, Ψ_U 等は C^{r-1} 級の写像となる. このとき $\{U_\lambda\}$ を X の座標近傍系として, $\{Z, X, \pi, \tilde{Y}, L(\tilde{Y}), U_\lambda, \varphi_{U\lambda}\}$ は多様体 X の上の $\tilde{Y}$ 型の**接テンソル・バンドル**とよばれる. とくに $\tilde{Y}=\tilde{V}_s{}^r$, $\Lambda^r(\tilde{V})$, $\Lambda^r(\tilde{V}^*)$ であるとき, Z を $T_s{}^r(X), \Lambda^r(X), \Lambda^{*r}(X)$ で表わす. $\tilde{Y}$ は $\tilde{V}$ の上のテンソル空間としたが, 環 $\Lambda(\tilde{V}), \Lambda(\tilde{V}^*)$ をとっても同じことがいえるので, これらに対応する Z を $\Lambda(X), \Lambda^*(X)$ で表わすことにする. 混乱が起らないときにはこれらの記号でそれぞれの接テンソル・バンドルをも表わすことにとしよう.

最後に Y が重さ W の r 次反変 s 次共変のテンソル空間のとき, $g_{VU}(x)$ による変換の式を書いてみよう. y と $y'=g_{VU}(x)y$ の成分が $y^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}$, $y'^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}$ として

$$y'^{k_1\cdots k_r}_{h_1\cdots h_s}=\left|\frac{\partial u^i}{\partial v^j}(x)\right|^W \sum\left(\frac{\partial v^{k_1}}{\partial u^{i_1}}\cdots\frac{\partial v^{k_r}}{\partial u^{i_r}}\frac{\partial u^{j_1}}{\partial v^{h_1}}\cdots\frac{\partial u^{j_s}}{\partial v^{h_s}}\right)(x)\, y^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s} \tag{2·26}$$

のように変換される.

2·5 ファイバー・バンドル

前節に述べた接テンソル・バンドルはつぎに述べる**ファイバー・バンドル**の

特別な場合である．

Z, X, Y を位相空間とし，写像 π を Z から X の上への連続写像とする．G を Y の上の位相変換群とする．すなわち G は位相群でつぎの条件をみたす連続写像 $\theta: G\times Y\to Y$ が与えられている．

1) G の単位元 e とすべての Y の点 y に対して $\theta(e,y)=y$ であり，またすべての点 y に対し $gy\equiv g(y)\equiv\theta(g,y)=y$ である元 g は e にかぎる．

2) $g_1, g_2, \in G, y\in Y$ に対して $\theta(g_1g_2, y)=\theta(g_1, \theta(g_2, y))$．

さらに，$\{U_\lambda\}$ を X の開被覆として，各 U_λ に対して $U_\lambda\times Y$ から $\pi^{-1}(U_\lambda)$ への位相写像

$$\varphi_\lambda: U_\lambda\times Y\to\pi^{-1}(U_\lambda) \tag{2·27}$$

が与えられていて，これらがつぎの条件をみたすとする．

1) $x\in U_\lambda,\ y\in Y$ に対して $\pi\varphi_\lambda(x,y)=x$

2) $\varphi_{\lambda,x}(y)\equiv\varphi_\lambda(x,y)$ とおき，$U_\lambda\cap U_\mu\neq\phi$ ならば Y の上の位相写像 $\varphi_{\mu,x}{}^{-1}\cdot\varphi_{\lambda,x}=g_{\mu\lambda}(x)$ は G の元で

$$g_{\mu\lambda}: U_\lambda\cap U_\mu\to G \tag{2·28}$$

は連続写像となる．

このとき $\mathfrak{F}=\{Z, X, \pi, Y, G, U_\lambda, \varphi_\lambda\}$ はファイバー・バンドルをなすといい，X, Y, Z をそれぞれ**底空間**，**ファイバー**，**バンドル空間**とよぶ．G はバンドルの群，π は**射影**，U_λ と φ_λ はそれぞれ座標近傍，**座標函数**とよばれ，$g_{\mu\lambda}$ は $\mathfrak{F}$ の**座標変換**とよばれる．$\pi^{-1}(x)=Y_x$ を点 x の上のファイバーという．また $\pi_\lambda: \pi^{-1}(U_\lambda)\to Y$ は $\varphi_\lambda{}^{-1}$ と射影 $U_\lambda\times Y\to Y$ との積を表わすものとする．

ファイバーとバンドルの群を共有する二つのファイバー・バンドル $\mathfrak{F}=\{Z, X, \pi, Y, G, U_\lambda, \varphi_\lambda\}$ と $\mathfrak{F}'=\{Z', X', \pi', Y, G, U_\alpha', \varphi_\alpha'\}$ に対して連続写像 $h: Z\to Z'$ がつぎの条件をみたすとき**バンドル写像**とよぶ．

1) $\bar{h}: X\to X'$ なる連続写像があって $h(\pi^{-1}(x))=\pi'^{-1}(\bar{h}(x))$, $x\in X$

2) $U_\lambda\cap\bar{h}^{-1}(U_\alpha')\neq\phi$ のとき，$x\in U_\lambda\cap\bar{h}^{-1}(U_\alpha')$, $x'=\bar{h}(x)$ に対して

$\varphi'_{\alpha,x'}{}^{-1}\cdot h\cdot\varphi_{\lambda,x}$ は G の元を表わし $U_\lambda\cap\bar{h}^{-1}(U_{\alpha}')$ から G の中への写像として連続である.

このとき，もしも $X=X'$ で $\bar{h}$ が恒等変換ならば $\mathfrak{F}$ と $\mathfrak{F}'$ とは同等であるといい，$\mathfrak{F}\equiv\mathfrak{F}'$ と表わす. 同等なファイバー・バンドルの類をとれば，座標近傍に無関係な定義を得る. このとき $\mathfrak{F}=\{Z,X,\pi,Y,G\}$ のように表わす.

ファイバー・バンドル $\mathfrak{F}=\{Z,X,\pi,Y,G,U_\lambda,\varphi_\lambda\}$ に対して $g_{\mu\lambda}:U_\lambda\cap U_\mu\to G$ が定まったが，これは $U_\lambda\cap U_\mu\cap U_\nu\neq\phi$ のとき

$$g_{\nu\mu}(x)g_{\mu\lambda}(x)=g_{\nu\lambda}(x) \tag{2·29}$$

なる関係をみたすことが定義から容易に導き出せる. 逆に

定理 2·8 位相空間 X とその開被覆 $\{U_\lambda\}$，位相空間 Y の上の位相変換群 G に対して連続写像 $g_{\mu\lambda}:U_\lambda\cap U_\mu\to G$ があって (2·29) をみたすとき，$g_{\mu\lambda}$ がその座標変換となるようなファイバー・バンドル $\mathfrak{F}$ がある. [存在定理]

(証明) 添字 λ の集合を J とし，J の点 λ の近傍系が λ のみからなるような位相を J に入れておいて，位相空間の積 $X\times Y\times J$ をつくる. $(x,y,\lambda),x\in U_\lambda$ なる点全体からなる部分集合を T とする. T の中での関係 $(x,y,\lambda)\sim(x',y',\mu)$ を $x=x',y'=g_{\mu\lambda}(x)(y)$ できめると，これは (2·29) によって同値関係である. この関係で T を類別してできる集合を Z とする. 自然な対応 $q:T\to Z$ で Z の開集合とは q による逆像が T の開部分集合となるものとして Z に位相を定める. この位相の入れ方から q は連続である. $\pi:Z\to X$, $\varphi_\lambda:U_\lambda\times Y\to\pi^{-1}(U_\lambda)$ を

$$\pi(q(x,y,\lambda))=x \tag{2·30}$$

$$\varphi_\lambda(x,y)=q(x,y,\lambda) \tag{2·31}$$

で定義する. 明らかに π も φ_λ も連続で $\varphi_\lambda(U_\lambda\times Y)\subset\pi^{-1}(U_\lambda)$ である. 任意の $z=q(x,y,\mu),x\in U_\lambda$ に対して $x\in U_\lambda\cap U_\mu$ であるから $(x,y,\mu)\sim(x,g_{\lambda\mu}(x)y,\lambda)$ である. (2·31) により $z=\varphi_\lambda(x,g_{\lambda\mu}(x)y)$. よって φ_λ は $U_\lambda\times Y$ を $\pi^{-1}(U_\lambda)$ の上にうつす. さらに $\varphi_\lambda(x,y)=\varphi_\lambda(x',y')$ であれば $(x,y,\lambda)\sim(x',y',\lambda)$ であるから $x=x',y'=g_{\lambda\lambda}(x)y$. $g_{\lambda\lambda}(x)=e$ であるから $y'=y$ が出る. つまり φ_λ は $U_\lambda\times Y$ から $\pi^{-1}(U_\lambda)$ の上への 1-1 連続写像である. こ

れが位相写像であることをいおう．それには $U_\lambda \times Y$ の任意の開部分集合 W の像が $\pi^{-1}(U_\lambda)$ の開部分集合となることをいえばよろしいが，$\pi^{-1}(U_\lambda)$ が Z の開集合であるから W の像が Z の開集合であることをいえばよろしい．したがって定義により $q^{-1}(\varphi_\lambda(W))$ が T での開集合なることをいえば十分である．そのためには $\{U_\lambda \times Y \times \lambda\}$ が T の開被覆をなしているから，$q^{-1}(\varphi_\lambda(W)) \cap U_\mu \times Y \times \mu$ が開集合なることをいえば十分である．明らかに $(x, y, \mu) \in q^{-1}(\varphi_\lambda(W)) \cap U_\mu \times Y \times \mu$ であることは，ある点 $(x, y') \in W$ があって $(x, y, \mu) \sim (x, y', \lambda)$ であることを意味するから，$x \in U_\lambda \cap U_\mu$ で $(x, g_{\lambda\mu}(x)y) \in W$ ということになる．よって写像 $\chi: U_\lambda \cap U_\mu \times Y \times \mu \to U_\lambda \times Y \times \lambda$ を $\chi(x, y, \mu) = (x, g_{\lambda\mu}(x)y, \lambda)$ で定義すれば，この χ は連続写像であって $\chi^{-1}(W \times \lambda)$ の逆像が開集合ということになる．よって φ_λ は位相的である．これでファイバー・バンドル $\mathfrak{F} = \{Z, X, \pi, Y, G, U_\lambda, \varphi_\lambda\}$ が定義できたことになる．

つぎに $\varphi_{\mu,x}{}^{-1} \cdot \varphi_{\lambda,x}: Y \to Y$ を $x \in U_\lambda \cap U_\mu$ に対して調べる．$y' = (\varphi_{\mu,x}{}^{-1} \cdot \varphi_{\lambda,x})(y)$ であれば $\varphi_{\mu,x}(y') = \varphi_{\lambda,x}(y)$，つまり $(x, y', \mu) \sim (x, y, \lambda)$ である．したがって $y' = g_{\mu\lambda}(x)y$ となる．これで証明された．（終）

G の任意の元 g_0 を G の**左移動** $g_0: G \to G$，すなわち $g_0(g) = g_0 g$ として G を G 自身の上の変換群と考えることにしたときにファイバーが G であるファイバー・バンドルを**主ファイバー・バンドル**という．任意の $\mathfrak{F} = \{Z, X, \pi, Y, G, U_\lambda, \varphi_\lambda\}$ に対して上記の存在定理により $\{g_{\mu\lambda}\}$ を座標変換とする主ファイバー・バンドル $\hat{\mathfrak{F}} = \{B, X, \hat{\pi}, G, G, U_\lambda, \hat{\varphi}_\lambda\}$ が存在する．逆に主ファイバー・バンドル $\hat{\mathfrak{F}}$ があって，G が Y の上の変換群であるとき，その主ファイバー・バンドルが $\hat{\mathfrak{F}}$ となる $\mathfrak{F}$ があることは明らかである．二つのファイバー・バンドル $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2$ に対して $\hat{\mathfrak{F}}_1 \equiv \hat{\mathfrak{F}}_2$ ならばこれらは**連合的**であるという．

$X \times G \times J$ の元 $(x, g, \lambda), x \in U_\lambda, \lambda \in J$ からなる集合を $\hat{T}$ とする．$X \times G \times J$ の上で G の元 g_0 を $(x, g, \lambda) \to (x, gg_0, \lambda)$ なるように作用させ，これを g_0 に対応する**右移動**といい $r(g_0)$ で表わす．$(x, g, \lambda) \sim (x, g', \mu)$ とは $x \in U_\lambda \cap U_\mu$, $g' = g_{\mu\lambda}(x)g$ であるから，任意の g_0 について $r(g_0)(x, g, \lambda) \sim r(g_0)(x, g', \mu)$ である．したがって $X \times G \times J$ の上での右移動群によって $\hat{T}$ は不変であ

って，しかもその上での同値関係 $\sim$ も不変であるから，この関係 $\sim$ によって類別されてできる空間を B とし，自然な写像を $\hat{q}:\hat{T}\to B$ として，G の任意の元 g_0 は B の上でも作用すると考えられ

$$r(g_0)(\hat{q}(x,g,\lambda))=\hat{q}(r(g_0)(x,g,\lambda)) \tag{2·32}$$

である．G が B の上の位相変換群となることを示そう．

$$\hat{\tau}:G\times\hat{T}\to\hat{T},\ \ \hat{\tau}(g_0,(x,g,\lambda))=r(g_0)(x,g,\lambda)$$
$$1\times\hat{q}:G\times\hat{T}\to G\times B,\ \ (1\times\hat{q})(g_0,(x,g,\lambda))=(g_0,\hat{q}(x,g,\lambda))$$
$$\tau:G\times B\to B,\ \ \tau(g_0,\hat{q}(x,g,\lambda))=r(g_0)(\hat{q}(x,g,\lambda))$$

とおくと $\hat{\tau},1\times\hat{q},\hat{q}$ は連続であることは明らかであって，$\tau\cdot(1\times\hat{q})=\hat{q}\cdot\hat{\tau}$ が成り立つ．B の任意の開部分集合 W に対して $\tau^{-1}(W)$ が $G\times B$ の開部分集合であれば τ が連続となる．それには $\hat{q}$ の定義から $(1\times\hat{q})^{-1}(\tau^{-1}(W))=\hat{\tau}^{-1}(\hat{q}^{-1}(W))$ が $G\times T$ の開部分集合であることを示せばよろしい．しかるに $\hat{\tau}$ と $\hat{q}$ の連続性からこのことは明らかである．$r(g):B\to B$ は主ファイバー・バンドルの右移動とよばれる．ところで (2·32) から $x\in U_\lambda$ に対して $\hat{\varphi}_\lambda(x,g_1g_2)=\hat{q}(x,g_1g_2,\lambda)=r(g_2)\hat{q}(x,g_1,\lambda)=r(g_2)\hat{\varphi}_\lambda(x,g_1)=r(g_2)r(g_1)\hat{\varphi}_\lambda(x,e)$，すなわち

$$\hat{\varphi}_\lambda(x,g_1g_2)=r(g_2)\hat{\varphi}_\lambda(x,g_1)=r(g_2)r(g_1)\hat{\varphi}_\lambda(x,e) \tag{2·33}$$

である．点 $x\in X$ で写像 $\xi:Y\to Y_x$ は，$x\in U_\lambda$ として $\pi_\lambda\cdot\xi:Y\to Y$ が G の元であるとき**許容写像**という．$x\in U_\lambda\cap U_\mu$ ならば $\pi_\mu\cdot\xi=g_{\mu\lambda}(x)\cdot\pi_\lambda\cdot\xi$ であるから，この定義は x を含む座標近傍のとり方に依存しないことがわかる．任意の $B\ni b,\hat{\pi}(b)=x$ に対して写像 $b:Y\to Y_x$ を

$$b(y)\equiv by=\varphi_\lambda(x,\hat{\pi}_\lambda(b)y),\qquad x\in U_\lambda,y\in Y \tag{2·34}$$

で定義する．$(\pi_\lambda\cdot b)(y)=\hat{\pi}_\lambda(b)y$ であるから b は許容写像である．しかるに上式の右辺$=\varphi_\mu(x,g_{\mu\lambda}(x)\hat{\pi}_\lambda(b)y)=\varphi_\mu(x,\hat{\pi}_\mu(b)y)$ であるから，この写像は x を含む座標近傍のとり方に関係しない．$\hat{\pi}^{-1}(x)\ni b_1,b_2$ で $b_1\neq b_2$ ならば，各々に対応する許容写像も異なる．任意の許容写像 $\xi:Y\to Y_x$ に対して $b=\hat{\varphi}_\lambda(x,\pi_\lambda\cdot\xi)$ とおけば

$$b(y)=\varphi_\lambda(x,\hat{\pi}_\lambda(b)y)=\varphi_\lambda(x,\pi_\lambda(\xi(y)))=\xi(y)$$

であるから $G_x=\hat{\pi}^{-1}(x)$ は Y から Y_x へのすべての許容写像の集まりとみることができる．したがって $\mathfrak{F}$ の主ファイバー・バンドル $\hat{\mathfrak{F}}$ は $\mathfrak{F}$ のすべての許容写像のつくるファイバー・バンドルである．

位相空間 X, ファイバー・バンドル $\mathfrak{F}'=\{Z', X', \pi', Y, G, U'_\lambda, \varphi'_\lambda\}$ および連続写像 $f: X\to X'$ が与えられているとき，X を底空間，ファイバーを Y, バンドルの群を G, 座標近傍を $U_\lambda=f^{-1}(U_\lambda')$, 座標変換を $g'_{\mu\lambda}\cdot f$ とするファイバー・バンドル $\mathfrak{F}=\{Z, X, \pi, Y, G, U_\lambda, \varphi_\lambda\}$ が存在定理によって定まる．これを写像 f による $\mathfrak{F}'$ の**誘導バンドル**といい $\mathfrak{F}=f^{\#}\mathfrak{F}'$ で表わすことにする．このとき写像 $h: Z\to Z'$ を

$$h(z)=\varphi'_\lambda(f(\pi(z)),\ \pi_\lambda(z)),\qquad \pi(z)\in U_\lambda$$

で定義することができる．実際 $\pi(z)=x\in U_\lambda\cap U_\mu$ とすれば，z は (x, y, μ) の同値類として

$$\begin{aligned}\varphi'_\mu(f(x), \pi_\mu(z))&=\varphi'_\lambda(f(x), g'_{\lambda\mu}(f(x))\pi_\mu(z))\\&=\varphi'_\lambda(f(x), g_{\lambda\mu}(x)\pi_\mu(z))=\varphi'_\lambda(f(x), \pi_\lambda(z))\end{aligned}$$

が成り立つからである．この定義によって $\pi'\cdot h=f\cdot\pi$ であって，h はバンドル写像となることは明らかである．これを**誘導写像**とよぶ．

底空間 X を共にする二つのファイバー・バンドル $\mathfrak{F}=\{Z, X, \pi, Y, G, U_\lambda, \varphi_\lambda\}$, $\mathfrak{F}'=\{Z', X, \pi', Y', G', U_\lambda, \varphi'_\lambda\}$ がある．$G\times G'$ を $Y\times Y'$ に

$$(g, g')(y, y')=(g(y), g'(y'))\tag{2·35}$$

で作用させると本節のはじめに述べた条件をみたすので $G\times G'$ は $Y\times Y'$ の上の変換群である．$U_\lambda\cap U_\mu\neq\phi$ のとき座標変換

$$g''_{\mu\lambda}: U_\lambda\cap U_\mu\to G\times G'\tag{2·36}$$

を $g''_{\mu\lambda}(x)=(g_{\mu\lambda}(x), g'_{\mu\lambda}(x))$ で与えると (2·29) をみたすので，$Y\times Y'$ をファイバーとするファイバー・バンドル $\mathfrak{F}''=\{Z'', X, \pi'', Y\times Y', G\times G', U_\lambda, \varphi''_\lambda\}$ が定まる．これを $\mathfrak{F}$ と $\mathfrak{F}'$ の**積**といい $\mathfrak{F}\times\mathfrak{F}'$ で表わす．とくに $\mathfrak{F}$ と $\mathfrak{F}'$ が連合的であるとき，$G=G'$ で $g_{\mu\lambda}(x)=g'_{\mu\lambda}(x)$ であるから

$$g(y, y')=(g(y), g(y'))\tag{2·37}$$

によって G を $Y\times Y'$ の上の変換群にできるので，$\mathfrak{F}''=\mathfrak{F}\times\mathfrak{F}'$ のバンドルの

群は G であり，$\mathfrak{F}''$ もまた $\mathfrak{F},\mathfrak{F}'$ と連合的となる．

つぎに Y と Y' がベクトル空間で $G\subset L(Y), G'\subset L(Y')$ であるとする．$G\times G'$ を $Y\otimes Y'$ の上で (1·8) によって

$$(g, g')(y\otimes y') = (g\otimes g')(y\otimes y') = g(y)\otimes g'(y') \tag{2·38}$$

で作用させると $G\times G'$ は $Y\otimes Y'$ の上の変換群となるので，$\mathfrak{F}$ と $\mathfrak{F}'$ からファイバーが $Y\otimes Y'$ であるファイバー・バンドル $\mathfrak{F}''$ をその座標変換を

$$g''_{\mu\lambda}(x) = g_{\mu\lambda}(x)\otimes g'_{\mu\lambda}(x)$$

としてつくることができる．これを $\mathfrak{F}$ と $\mathfrak{F}'$ のテンソル積といい $\mathfrak{F}\otimes\mathfrak{F}'$，そのバンドル空間を $Z\otimes Z'$ で表わすことにする．$\mathfrak{F}$ と $\mathfrak{F}'$ が連合的なときには

$$g(y\otimes y') = (g\otimes g)(y\otimes y') \tag{2·39}$$

によって G を $Y\otimes Y'$ の上の変換群とみれば，$\mathfrak{F}\otimes\mathfrak{F}'$ のバンドルの群も G でそれは $\mathfrak{F}$ と $\mathfrak{F}'$ とに連合的である．この定義に従えば，X が微分可能多様体のときには $T^{r+s}(X) = T^r(X)\otimes T^s(X)$ である．同様に $Y\oplus Y'$ をファイバーにもつ $\mathfrak{F}\oplus\mathfrak{F}'$ をつくることができて同じような事情が成り立つ．

ファイバー・バンドル $\mathfrak{F}=\{Z, X, \pi, Y, G\}$ において X の部分集合 $A\subset X$ から Z への連続写像 $f: A\to Z$ が $\pi(f(x))=x$ であるとき，それは $\mathfrak{F}$ の A における**切断**とよばれる．

いままでは位相的なファイバー・バンドルについて説明したが，これまでの位相空間 X, Y 等をすべてそれぞれに応じた微分可能度の多様体とし，写像 π, φ_α 等もすべて適当な微分可能度の写像としたとき，これらのファイバー・バンドルは微分可能であるという．以下ではこのようなもののみ考える．

前節末で述べた C^r 級多様体 X の上の $\tilde{Y}$ 型の接テンソル・バンドル $\mathfrak{F}=\{Z, X, \pi, \tilde{Y}, L(\tilde{V})\}$ に対して X の開部分集合 N における $\mathfrak{F}$ の切断 $f: N\to Z$ が C^t 級 $(0\leqq t\leqq r-1)$ ならば，これを N の上の $\tilde{Y}$ 型の C^t 級**接テンソル場**という．とくに $T^1(X)$ と $T_1(X)$ のときにはそれぞれ反変ベクトル場（または無限小変換），共変ベクトル場という．また $\Lambda^{*r}(X)$ のときには N 上の r 次の（外）**微分形式**という．

われわれが後に取扱うファイバー・バンドルは主としてファイバーがベクト

ル空間であるものである．とくにこれを**ベクトル・バンドル**とよぶことにしよう．

第3章 微分形式

3·1 外微分

X は n 次元の C^r 級多様体 $(1\leqq r)$ とする．n 次元ベクトル空間 $\tilde{V}$ の外形式の代数 $\Lambda^*(\tilde{V})=\Lambda(\tilde{V}^*)$ をファイバーとする X の接ファイバー・バンドル $\Lambda^*(X)$ は 2·4 によって C^{r-1} 級多様体となった．X の開集合 N における $\Lambda^*(X)$ の C^l 級の切断 $(l\leqq r-1)$ を N 上の C^l 級**外積多項式**という．このような外積多項式の全体は加法 $a\omega+a'\omega'$ を

$$(a\omega+a'\omega')(x)=a\omega(x)+a'\omega'(x),\qquad x\in N \tag{3·1}$$

で定義すれば実数体上のベクトル空間をなし．さらに外積 $\omega\wedge\omega'$ を

$$(\omega\wedge\omega')(x)=\omega(x)\wedge\omega'(x) \tag{3·2}$$

で定義すれば実数の掛算をもった環 $\Phi^l(N)$ をなす．p 次の微分形式全体からなる部分を $\Phi^l{}_p(N)$ とおけば $\Phi^l(N)=\sum_{p=0}^{n}\Phi_p{}^l(N)$ である．

定理 3·1 X が C^r 級多様体 $(2\leqq r)$ のとき，環 $\Phi^l(X)$ $(1\leqq l)$ から環 $\Phi^{l-1}(X)$ への線型な対応で次の条件をみたす d があって一意に定まる．

1) ω が p 次の微分形式のとき $d\omega$ は $(p+1)$ 次の微分形式

2) ω が p 次の微分形式ならば

$$d(\omega\wedge\omega')=d\omega\wedge\omega'+(-1)^p\omega\wedge d\omega'$$

3) $\omega=f$（スカラー場）のとき

$$d\omega=df\qquad (2·2 \text{ の意味での共変接ベクトル場})$$

4) $\omega=f$（スカラー場）のとき

$$d(df)=0$$

（証明） 任意の座標近傍 (U,u) でいえば十分である．各点 x で $\{du^1(x),\cdots,du^n(x)\}$ が $V_x{}^*$ の基をなすから，p 次の微分形式は U において

$$\omega=\sum_{i_1<\cdots<i_p}a_{i_1\cdots i_p}(u^1,\cdots,u^n)du^{i_1}\wedge\cdots\wedge du^{i_p}$$

と表わすことができて，係数は C^l 級の n 変数の函数 $a_{i_1\cdots i_p}(x^1,\cdots,x^n)$ を

用いて表わされる．このような d があれば，条件 1)～4) によって

$$d\omega=\sum da_{i_1\cdots i_p}(u^1,\cdots,u^n)\wedge du^{i_1}\wedge\cdots\wedge du^{i_p} \tag{3·3}$$

でなければならない．逆にこのように定義すると 1),3),4) をみたすことは明らかであり，2) は $\omega=adu^{i_1}\wedge\cdots\wedge du^{i_p}$, $\omega'=bdu^{j_1}\wedge\cdots\wedge du^{j_q}$ の場合に成立することをいえば十分であって，容易にためすことができる．この作用素 d を**外微分**という．性質 1)～4) からただちにつぎの定理が出る．

定理 3·2 任意の外積多項式 ω に対して

$$d(d\omega)=0 \tag{3·4}$$

d は局所的に定義することができたから，$d:\Phi^l(X)\to\Phi^{l-1}(X)$ はそのまま X の任意の開部分集合 N に対する外微分 $d:\Phi^l(N)\to\Phi^{l-1}(N)$ として通用させることができる．$d\omega=0$ なる ω は**閉である**といい，またある ω' があって $d\omega'=\omega$，つまり d による像であるような ω は**完全である**という．(3·4) によって完全な ω はもちろん閉である．

X と Y を C^r 級多様体，$\varphi:X\to Y$ を C^l 級写像とする．$\Phi^{l-1}(Y)$ で定義された写像 φ^* を (1·40),(2·11),(2·12) によって

$$(\varphi^*\omega)(x)=(\wedge^p\varphi^*_x)(\omega(\varphi(x))),\qquad \omega\in\Phi_p{}^l(Y) \tag{3·5}$$

できめて，φ の**双対写像**とよぶ．

定理 3·3 C^l 級写像 $\varphi:X\to Y$ の双対写像は環 $\Phi^{l-1}(Y)$ から環 $\Phi^{l-1}(X)$ への準同型対応

$$\varphi^*:\Phi^{l-1}(Y)\to\Phi^{l-1}(X) \tag{3·6}$$

であって，外微分 d と可換，すなわち

$$d\cdot\varphi^*=\varphi^*\cdot d \tag{3·7}$$

である．

（証明） (3·1),(3·2) と定義から φ^* が準同型であることは明らかである．d も φ^* も線型でかつ局所的に定義されているから，X の任意の点 x の近傍 U, $y=\varphi(x)$ の座標近傍 V をとって，その局所座標を $v^1,\cdots,v^m$ とし，φ を U に制限し ω が $dv^1,\cdots,dv^m$ について単項のときをいえばよろしい．$\omega=b(v^\alpha)dv^1\wedge\cdots\wedge dv^p$ とする．(2·12) を用いて

$$(\varphi^*\omega)(x)=(\wedge^p\varphi^*{}_x)((b(v^\alpha)dv^1\wedge\cdots\wedge dv^p)(\varphi(x)))$$
$$=b(v^\alpha\cdot\varphi(x))\varphi^*{}_x(dv^1(\varphi(x)))\wedge\cdots\wedge\varphi^*{}_x(dv^p(\varphi(x)))$$
$$=b(v^\alpha\cdot\varphi(x))d(\varphi_x(v^1))(x)\wedge\cdots\wedge d(\varphi_x(v^p))(x)$$
$$=b(v^\alpha\cdot\varphi(x))d(v^1\cdot\varphi)(x)\wedge\cdots\wedge d(v^p\cdot\varphi)(x)$$

よって

$$\varphi^*(b(v^\alpha)dv^1\wedge\cdots\wedge dv^p)=b(v^\alpha\cdot\varphi)d(v^1\cdot\varphi)\wedge\cdots\wedge d(v^p\cdot\varphi) \qquad (3\cdot8)$$

である．したがって (3·3) と (2·12) から

$$d\varphi^*(b(v^\alpha)dv^1\wedge\cdots\wedge dv^p)=d(b(v^\alpha\cdot\varphi))\wedge d(v^1\cdot\varphi)\wedge\cdots\wedge d(v^p\cdot\varphi)$$
$$=\varphi^*(db(v^\alpha)\wedge dv_1\wedge\cdots\wedge dv^p)$$

すなわち $d\varphi^*\omega=\varphi^*d\omega$ が成り立った．(終)

定理 3·4 X, Y, Z を C^r 級多様体，$\varphi: X\to Y, \psi: Y\to Z$ を C^l 級写像 $(1\leqq l\leqq r)$ とすると

$$(\psi\cdot\varphi)^*=\varphi^*\cdot\psi^* \qquad (3\cdot9)$$

((3·5) と (2·14′) から明らかである)

3·2 微分形式と積分

位相空間 X の開被覆 $\{U_\lambda\}$ は X の任意のコンパクトな部分集合と共通点をもつ要素がつねに有限個であるとき**局所有限**であるという．

定理 3·5 多様体 X が完全可分ならば，X の近傍基をなす任意の開集合の族に対して，局所有限で可算な開被覆となる部分族を選び出すことができる．

(証明) X が完全可分な多様体であるから可算な開被覆 $\{U_\lambda\}$, $\lambda=1,2,\cdots$ で各 $\bar{U}_\lambda$ がコンパクトなものがある．コンパクト集合の系列

$$Q_\lambda=\bigcup_{1\leqq\mu\leqq\lambda}\bar{U}_\mu, \qquad \lambda=1,2,\cdots$$

をつくると $Q_1\subset Q_2\subset\cdots$．さらにこれから

$$Q_\lambda\subset R_\lambda\subset \mathrm{Int}\, R_{\lambda+1}$$

なるコンパクト集合の系列 $\{R_\lambda\}$ を $R_1=Q_1$ とおいて帰納法で構成する．$R_1, \cdots, R_\lambda$ がすでにつくられたとし $R_{\lambda+1}$ をきめる．$R_\lambda\cup Q_{\lambda+1}$ はコンパクトゆえ，これを覆う有限個の U_μ がある．これらの閉包の和集合を $R_{\lambda+1}$ とすれば上に述べた性質をもつ．これから

$$S_1=R_1,\quad S_\lambda=R_\lambda-\mathrm{Int}\,R_{\lambda-1},\qquad \lambda=2,3,\cdots$$

なるコンパクト集合の族$\{S_\lambda\}$をつくる．X の任意の点 x に対して $x\notin R_{\lambda-1}$, $\in R_\lambda$ なる λ がある．したがって $x\in S_\lambda$ すなわち $\{S_\lambda\}$ は X の被覆系をなす $R_{\lambda-2}\subset\mathrm{Int}\,R_{\lambda-1}$ であるから $S_\lambda\cap R_{\lambda-2}=\phi$.

さて与えられた開集合の基から各 S_λ に対してこれを覆う有限個の要素を選び出し，しかもこれらが $R_{\lambda+1}$ に含まれ $R_{\lambda-2}$ とは共通点をもたないようにできる．この部分族を $\mathfrak{N}_\lambda$ として $\mathfrak{N}=\bigcup_{\lambda=1}^{\infty}\mathfrak{N}_\lambda$ とおけば，$\mathfrak{N}$ は可算な開被覆をなす．任意のコンパクト集合 A に対して $A\subset R_\lambda$ であるような λ があるから $\mathfrak{N}_\mu$ $(\mu\geqq\lambda+2)$ の要素は R_λ, したがって A と共通点をもたない．よって $\mathfrak{N}$ は局所有限である．（終）

多様体ではその閉被がコンパクトなすべての座標近傍を考えると，これは近傍基をなすから，完全可分な多様体は局所有限でその閉被がコンパクトである座標近傍からなっている可算な被覆系をもつことがわかる．

補題 3·6　任意の実数 $a<b$ に対して，区間 (a,b) で正，その補集合では 0 である C^∞ 級の函数がある．

（証明）　つぎの函数

$$g_{ab}(x)=\begin{cases}\exp\left(-\dfrac{1}{x-a}+\dfrac{1}{x-b}\right), & x\in(a,b)\\ 0 & x\notin(a\cdot b)\end{cases}$$

を考えると容易に上の性質をもつことがいえる．（終）

系 3·7　Descartes 座標 $x_1,\cdots,x_n$ をもつ n 次元 Euclid 空間の開区間 $I: a_i<x_i<b_i$, $i=1,2,\cdots,n$ に対して，そこでは正，その補集合では 0 である C^∞ 級函数がある．

（証明）　$$g_I(x_1,\cdots,x_n)=g_{a_1b_1}(x_1)\cdots g_{a_nb_n}(x_n)$$

で定義される函数 g_I を考えればよろしい（終）

定理 3·8　完全可分な C^r 級多様体 X $(1\leqq r\leqq\infty)$ の上にはつぎの性質をもつ C^r 級の函数 $\rho_\alpha, \alpha=1,2,\cdots$が存在する．

1)　$0\leqq\rho_\alpha\leqq 1$ で，$\rho_\alpha>0$ なる点の集合 D_α の閉包 $\bar{D}_\alpha$（ρ_α の**台**とい

う）はコンパクトな集合で，ある座標近傍に含まれる．

2) X の各点は有限個の $\bar{D}_\alpha$ と共通点をもつだけであるような近傍をもつ．

3)
$$\sum_{\alpha=1}^{\infty}\rho_\alpha=1 \tag{3·10}$$

（証明） X の C^r 級座標近傍でその Euclid 空間の中への像が開区間で，かつ閉包がコンパクトであって，しかもその座標系がこの閉包を含むある開集合まで広げられるようなものの全体を考えると，これは X の開集合からなる一つの基をなすことは明らかである． X が完全可分であるから，この部分族で局所有限，可算な座標近傍系 $\mathfrak{S}=\{U_\alpha, u_\alpha\}$ をとることができる．u_α が $U_\alpha'\supset\bar{U}_\alpha$ まで広がり $u_\alpha'|U_\alpha=u_\alpha$ とする．$u_\alpha(U_\alpha)$ は開区間であるから，これに対する上記の補題の系で考えた C^∞ 級の函数を g_α とする．X の上の実数値函数 h_α を U_α 上では $h_\alpha=g_\alpha\cdot u_\alpha$, $X-U_\alpha$ では $h_\alpha=0$ とおけば，$U_\alpha'\supset\bar{U}_\alpha$ でも $h_\alpha=g_\alpha\cdot u_\alpha'$ と考えられるから h_α は X 上で C^r 級であって，U_α で正である．

さて各 α に対して

$$\rho_\alpha(x)=h_\alpha(x)\Big/\sum_{\beta=1}^{\infty}h_\beta(x), \qquad x\in X$$

とおく．$x\in U_\beta$ である β は有限個ゆえ，右辺は意味を有する．x の近傍でその閉包がコンパクトなものを一つとり V とする．$\bar{V}\cap U_\beta\neq\phi$ なる添字を $\beta_1, \cdots, \beta_m$ とすれば V では $\sum_{\beta=1}^{\infty}h_\beta(x)=\sum_{j=1}^{m}h_{\beta_j}(x)>0$ であるから ρ_α は C^r 級である．二つの開集合 U と V に対して $U\cap\bar{V}\neq\phi$ と $U\cap V\neq\phi$ とは同値であるから，$V\cap\bar{U}_\beta\neq\phi$ となる添字は $\beta_1, \cdots, \beta_m$ である．ρ_α の台は明らかに $\bar{U}_\alpha$ であるから点 x に対して，この近傍 V が 2) の条件をみたし，1) と 3) も明らかである．（終）

多様体 X を底空間とするベクトル・バンドル $\mathfrak{F}$ の切断 f に対して，$f(x)\neq0$ である点の軌跡の閉包を f の**台**という．X が n 次元で C^r 級のとき，外積多項式の環 $\Phi^l(X)$ $(0\leqq l\leqq r-1)$ の元でその台がコンパクトなものの

全体は (3·1), (3·2) から $\Phi^l(X)$ のイデアルをなす．これを $\hat{\Phi}^l(X)$ で表わそう．もちろん $\hat{\Phi}^l(X)=\sum_{p=0}^{n}\hat{\Phi}_p{}^l(X)$ である．

定理 3·9 X が向きのついている完全可分な n 次元 C^r 級多様体とすれば，つぎの性質をもつ $\hat{\Phi}_n{}^0(X)$ 上の実数値汎函数があってただ一つ，これを積分記号 $\int$ で表わす．$\hat{\Phi}_n{}^0(X)\ni\omega$ の台が，X と同じ向きをもつ座標近傍 (U, u) に含まれるとき $\omega=a(u^1, \cdots, u^n)du^1\wedge\cdots\wedge du^n$ として

$$\int\omega=\int_{u(U)}a(x^1, \cdots, x^n)\,dx^1\cdots dx^n \tag{3·11}$$

ただし右辺は n 重 Riemann 積分を表わす．

（証明） 前定理をそのまま利用するが，座標近傍系 $\mathfrak{S}=\{(U_\alpha, u_\alpha)\}$ は X に与えられている向きと同じ向きをもつものとしてよろしい．

コンパクトな台 S をもつ n 階の微分形式 ω を考える．任意の点 $x\in S$ に対して適当な近傍 $V(x)$ で $V(x)\cap\bar{D}_\alpha\neq\phi$ なる添字 α が有限個となるものがある．S はコンパクトゆえ，これを覆う有限個の $V(x_\beta)$ がある．したがって $\rho_\alpha\omega\neq 0$ である α は有限個である．$\rho_\alpha\omega$ の台は $\bar{D}_\alpha=\bar{U}_\alpha$ の部分集合で，$\bar{U}_\alpha\subset U_\alpha{}'$（座標近傍）であるから $\int\rho_\alpha\omega$ を適当な座標近傍を用いて (3·11) によって定めることができる．そこで $\int\omega$ を

$$\int\omega=\sum_\alpha\int\rho_\alpha\omega \tag{3·12}$$

と定める．この定義によってこの定理の性質をみたす $\int$ が得られたことを示そう．まず $\int\rho_\alpha\omega$ が，$\rho_\alpha\omega$ の台を含む座標近傍にかかわりなく定まることは

$$\rho_\alpha\omega=a(u^1, \cdots, u^n)du^1\wedge\cdots\wedge du^n=b(v^1, \cdots, v^n)dv^1\wedge\cdots\wedge dv^n$$

ならば

$$a(u^1, \cdots, u^n)=b(v^1, \cdots, v^n)\left|\frac{\partial v^i}{\partial u^j}\right|$$

である．ところで Riemann n重積分に対して

$$\int_{u(U)} a(x^1, \cdots, x^n)dx^1, \cdots, dx^n = \int_{u(U)} b(y^1, \cdots, y^n)\left|\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right| dx^1 \cdots dx^n$$
$$= \int_{v(U)} b(y^1, \cdots, y^n)dy^1 \cdots dy^n$$

つぎに他の1の分解 (3・10) $\{\rho_\alpha'\}$ を用いて同じ $\int \omega$ が定まることを示す．実際

$$\sum_\alpha \int \rho_\alpha \omega = \sum_{\alpha,\beta} \int \rho_\alpha \rho_\beta' \omega = \sum_\beta \int \rho_\beta' \omega \qquad (終)$$

X の正則で向きをもつ m 次元部分多様体 (φ, Y) を考え，X の任意の連続な m 次微分形式 ω に対して $\varphi^*\omega$ の台がコンパクトならば，$\int \varphi^*\omega$ を Y の上で考えることができる．これを ω の (φ, Y) 上での積分とよび $\int_Y \omega$ で表わす．

向きのついている C^r 級 $(2 \leqq r)$ の多様体 X の開領域 D に X と同じ向きを入れる．$\bar{D}$ がコンパクトで，その境界 $B = \bar{D} - D$ が正則な $(n-1)$ 次元の部分多様体であると仮定する．2・3の例2によって，B の任意の点 y の近傍 U での局所座標系 $(u^1, \cdots, u^n)$ が X と同じ向きをもち，$u^n > 0$ が $D \cap U$ となるものがある．$u^\alpha | B \cap U, \alpha = 1, 2, \cdots, n-1$ は y における B の局所座標系とみなすことができる．このように導入される B 上の座標近傍系が向きをもつことは容易に証明することができる．これが B 上に定める向きに $(-1)^n$ を乗じた向きをもつ部分多様体を ∂D で表わす．しかるとき D に対して次の定理が成立する．

定理 3・10　$\omega \in \Phi^1{}_{n-1}(X)$ に対して

$$\int_D d\omega = \int_{\partial D} \omega \qquad (3\cdot13)$$

[Stokes の定理]

（証明）　前定理における X の上の函数 ρ_α を用い，$\bar{D}$ も B もコンパクトなことに注意して

$$\int_D d\omega = \sum_\alpha \int_D d(\rho_\alpha \omega), \qquad \int_{\partial D} \omega = \sum_\alpha \int_{\partial D} \rho_\alpha \omega$$

よって ω の台が一つの座標近傍 (U, u) に属するときをやればよい．そのとき (3·7) と Euclid 空間での Stokes の定理によって

$$\int_D d\omega = \int_{D\cap U} d\omega = \int_{u(D\cap U)} (u^{-1})^* d\omega = \int_{u(D\cap U)} d(u^{-1})^*\omega$$
$$= \int_{\partial(u(D\cap U))} (u^{-1})^*\omega$$

$$\int_{\partial D} \omega = \int_{(\partial D)\cap U} \omega = \int_{u(\partial D\cap U)} (u^{-1})^*\omega$$

ところで ω の台は U に含まれているから ∂U と共通点をもたない．したがって上の式の右辺は相等しくなる．（終）

3·3 1次変換群上の微分形式

m 次元の実一般 1 次変換群 $GL(m)$ において以下の微分形式を考える．$GL(m)$ の元は正則な m 次正方行列 $(a_\alpha{}^\beta)$ で表わされるから $a_\alpha{}^\beta$ は $GL(m)$ 上の函数と考えることができて，しかも座標系をなす m^2 個の函数とみなすことができる．

$$b_\alpha{}^\beta(g) = a_\alpha{}^\beta(g^{-1}), \qquad g \in GL(m) \tag{3·14}$$

とおいて，$GL(m)$ 上の微分形式

$$\omega_\alpha{}^\beta = \sum b_\gamma{}^\beta da_\alpha{}^\gamma \tag{3·15}$$

をつくる．$GL(m)$ の元 g_0 に対応する左移動 $l(g_0)$，右移動 $r(g_0)$ に対して $a_\alpha{}^\gamma \cdot l(g_0) = \sum a_\sigma{}^\gamma(g_0) a_\alpha{}^\sigma$, $a_\alpha{}^\gamma \cdot r(g_0) = \sum a_\alpha{}^\sigma(g_0) a_\sigma{}^\gamma$ であるから (2·13)′ により

$$(l(g_0))^*\omega_\alpha{}^\beta = \sum (b_\rho{}^\beta b_\gamma{}^\rho(g_0))(a_\sigma{}^\gamma(g_0) da_\alpha{}^\sigma) = \sum b_\rho{}^\beta da_\alpha{}^\rho = \omega_\alpha{}^\beta$$
$$(r(g_0))^*\omega_\alpha{}^\beta = \sum (b_\rho{}^\beta(g_0) b_\gamma{}^\rho)(da_\sigma{}^\gamma a_\alpha{}^\sigma(g_0)) = \sum b_\rho{}^\beta(g_0)\omega_\sigma{}^\rho a_\alpha{}^\sigma(g_0)$$

すなわち，つのぎ関係式を得る．

$$(l(g_0))^*\omega_\alpha{}^\beta = \omega_\alpha{}^\beta, \quad (r(g_0))^*\omega_\alpha{}^\beta = \sum a_\rho{}^\beta(g_0{}^{-1})\omega_\sigma{}^\rho a_\alpha{}^\sigma(g_0) \tag{3·16}$$

$GL(m)$ の**内部自己同型** $\sigma_{g_0}(g) = g_0 g g_0{}^{-1}$ に対しては $\sigma_{g_0} = l(g_0)\cdot r(g_0)^{-1}$ ゆえ

$$(\sigma_{g_0})^*\omega_\alpha{}^\beta = (r(g_0{}^{-1}))^*\omega_\alpha{}^\beta = \sum a_\rho{}^\beta(g_0)\omega_\sigma{}^\rho a_\alpha{}^\sigma(g_0{}^{-1}) \tag{3·17}$$

である．

$GL(m)$ の Lie 部分群 G を考え，部分多様体として (ι, G) であるとする．$\iota^*\omega_\alpha{}^\beta=\hat{\omega}_\alpha{}^\beta$ は G 上の微分形式系である．単位元 e での任意の接ベクトル $\mathfrak{v}$ に対して (1·9) と (3·16) から

$$\langle l(g_0)_*\mathfrak{v}, \omega_\alpha{}^\beta\rangle=\langle\mathfrak{v}, l(g_0)^*\omega_\alpha{}^\beta\rangle=\langle\mathfrak{v}, \omega_\alpha{}^\beta\rangle$$

$\omega_\alpha{}^\beta$ は G の任意の点 g_0 での G への接ベクトル $\mathfrak{v}$ に対して m 次の正方行列 $(\langle\mathfrak{v}, \omega_\alpha{}^\beta\rangle)$ をきめるが，$l(g_0)_*\iota_*T_e(G)=\iota_*T_{g_0}(G)$ と上の関係式から，このような行列の集合は $\omega_\alpha{}^\beta$ が $\iota_*T_e(G)$ できめる行列の全体と同じである．これを $L(G)$ で表わせば，m 次正方行列全体のつくる Lie 環の部分環をなしている．

定数 $C_\beta{}^\alpha$ で $\sum C_\beta{}^\alpha\omega_\alpha{}^\beta(\iota_*T_e(G))=0$ となるような組 $\{C_\beta{}^\alpha\}$ は，一次独立なものが $r=m^2-\dim G$ 組である．これを $C^\alpha_{\beta(\lambda)}, \lambda=1, 2, \cdots, r$ として

$$\theta_\lambda=\sum C^\alpha_{\beta(\lambda)}\omega_\alpha{}^\beta \tag{3·18}$$

とおけば，各点 $g\in GL(m)$ において $\langle\mathfrak{v}, \theta_\lambda\rangle=0$ となる接ベクトルの集合は (3·16) によって $(l(g))_*(\iota_*T_e(G))$ である．部分空間 $(l(g)\cdot\iota, G)$ がこの点 g でこれを接空間にしているから，Pfaff 方程式系

$$\theta_\lambda=0, \qquad \lambda=1, 2, \cdots, r$$

は完全積分可能で，その解は $(l(g)\cdot\iota, G)$, $g\in GL(m)$ である．さらに定数の組 $\{C^\alpha_{\beta(i)}\}$, $i=1, 2, \cdots, N=\dim G$ を適当に選び N 個の

$$\omega_i=\sum C^\alpha_{\beta(i)}\omega^\beta_\alpha \tag{3·19}$$

が $\theta_1, \cdots, \theta_r$ と共に一次独立となるようにする．明らかに

$$d\omega_i=\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{N}C_{ijk}\omega_j\wedge\omega_k+\sum_{j=1}^{N}\sum_{\lambda=1}^{r}D_{ij\lambda}\omega_j\wedge\theta_\lambda$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{\lambda,\mu=1}^{r}E_{i\lambda\mu}\theta_\lambda\wedge\theta_\mu,\quad C_{ijk}=-C_{ikj},\quad E_{i\lambda\mu}=-E_{i\mu\lambda}$$

と表わされるが，(3·16) から ω_i も θ_λ も $(l(g))^*$ により不変であるから，(3·7) を用いると，係数 C_{ijk}, $D_{ij\lambda}$, $E_{i\lambda\mu}$ はすべて定数であることがわかる．ところで $(l(g)\cdot\iota)^*\theta_\lambda=0$ であるから，部分空間 $(l(g)\cdot\iota, G)$ の上の一次独立

な微分形式

$$\bar{\omega}_i=(l(g)\cdot\iota)^*\omega_i \tag{3·20}$$

に対して，上に求めた式から

$$d\bar{\omega}_i=\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{N}C_{ijk}\bar{\omega}_j\wedge\bar{\omega}_k \tag{3·21}$$

である．これは g が e のとき G の**構造方程式**といわれているもので，係数 C_{ijk} は G の**構造定数**とよばれている．

Frobenius の定理によれば，$GL(m)$ の中に C^1 曲線 $f:(a,b)\to GL(m)$ があって

$$(f^*\omega_\alpha{}^\beta)(t)=\sum b_\gamma{}^\beta(f(t))d(a_\alpha{}^\gamma\cdot f)(t)\in L(G)dt$$

ならば，t での接ベクトル $\mathfrak{v}$ に対して

$$\langle f_*\mathfrak{v},\theta_\lambda\rangle=\langle\mathfrak{v},f^*\theta_\lambda\rangle=\langle\mathfrak{v},\sum C^\alpha_{(\lambda)\beta}(f^*\omega_\alpha{}^\beta)\rangle=0$$

であるから，この曲線は G による $GL(m)$ の剰余類がつくる上記の部分空間のいずれかに含まれる．

第 4 章　ベクトル・バンドルと接続

4·1　高階 1 次変換群

n 次元の座標空間 R^n の座標系を $x^1, \cdots, x^n$ とする．R^n の開集合を開集合にうつす C^r 級位相写像 f の全体を $C_n{}^r$ とし，f の定義域と値域をそれぞれ U_f, V_f で表わそう．元 $\{f, x\}, f \in C_n{}^r, x \in U_f$ の全体を考え，この集合において $\{f, x\} \sim \{g, y\}$ は $x=y$ であって，x の適当な近傍において f と g が同じ写像となることと定義すれば，これは同値関係である．これによって類別したものを $\Gamma_n{}^r$ とする．元 $\{f, x\}$ の属する類を (f, x) で表わそう．

R^n の任意の 2 点 x, y に対して $y=f(x)$ であるような $\Gamma_n{}^r$ の元 (f, x) のつくる部分集合を $\Gamma_n{}^r(y, x)$ とおけば，$\Gamma_n{}^r$ はこのような部分集合に類別される

$$\Gamma_n{}^r = \bigcup_{x, y \in R^n} \Gamma_n{}^r(y, x) \tag{4·1}$$

$$(x, y) \neq (x_1, y_1) \text{ ならば } \Gamma_n{}^r(y, x) \cap \Gamma_n{}^r(y_1, x_1) = \phi \tag{4·2}$$

$\Gamma_n{}^r$ の二元の積を $\Gamma_n{}^r(z, y)$ の元と $\Gamma_n{}^r(y, x)$ の元に対してのみ次のように定義する．

$\Gamma_n{}^r(z, y) \ni \beta = (g, y)$，$\Gamma_n{}^r(y, x) \ni \alpha = (f, x)$ で $V_f \subset U_g$ なる f と g をとって

$$\beta\alpha = (g, y)(f, x) = (gf, x) = \gamma \in \Gamma_n{}^r(z, x) \tag{4·3}$$

一般に集合 M が互に共通元をもたない部分集合 $M_{\mu\lambda}(\lambda, \mu \in J)$ に類別され

1)　$M = \bigcup_{\lambda, \mu \in J} M_{\mu\lambda}$ であって，$(\lambda, \mu) \neq (\lambda_1, \mu_1)$ ならば $M_{\mu\lambda} \cap M_{\mu_1\lambda_1} = \phi$ であって，M の元の積は

2)　$\beta \in M_{\nu\mu}, \alpha \in M_{\mu\lambda}$ なるとき定義されていて $\beta\alpha = \gamma \in M_{\nu\lambda}$

逆に

3)　$\alpha \in M_{\mu\lambda}, \gamma \in M_{\nu\lambda}$ に対して $\beta\alpha = \gamma$ である β があってただ一つ

4)　$\beta \in M_{\nu\mu}, \gamma \in M_{\nu\lambda}$ に対して $\beta\alpha = \gamma$ である α があってただ一つ

積の考えられる元 α, β, γ に対して結合則

5) $$(\gamma\beta)\alpha=\gamma(\beta\alpha)$$

が成立するとき，M は**亜群** (groupoid) をなすという．以上の定義によって

補題 4·1 $\Gamma_n{}^r$ は亜群であり，$\Gamma_n{}^r(x,x)$ は群である．

$\Gamma_n{}^r(y_0,x_0)\ni(f,x_0),(g,x_0)$ に対して f と g がそれぞれ x_0 の近傍で

$$y^j=f^j(x^1,\cdots,x^n),\qquad j=1,\cdots,n$$

$$y^j=g^j(x^1,\cdots,x^n),\qquad j=1,\cdots,n$$

と表わされたとして，点 x_0 での f^j と g^j の r 階までの偏微分係数がそれぞれ等しいとき $(f,x_0)\sim(g,x_0)$ であると定義すれば，これは明らかに同値関係である．$(f,x_0),(g,x_0)\in\Gamma_n{}^r(x_1,x_0),(f_1,x_1),(g_1,x_1)\in\Gamma_n{}^r(x_2,x_1)$ が $(f,x_0)\sim(g,x_0),(f_1,x_1)\sim(g_1,x_1)$ ならば $(f_1,x_1)(f,x_0)\sim(g_1,x_1)(g,x_0)$ であることは複合函数の偏微分の公式から明らかである．この同値関係で $\Gamma_n{}^r$ を類別したものは，やはり亜群をなす．これを $N_n{}^r$ と表わし，$\Gamma_n{}^r$ から $N_n{}^r$ の上への自然な準同型対応を

$$\theta_r:\Gamma_n{}^r\to N_n{}^r,\qquad \theta_r(\Gamma_n{}^r(y,x))=N_n{}^r(y,x) \tag{4·4}$$

とする．この $N_n{}^r$ を R^n での **r 階 1 次変換亜群**とよぶ．

補題 4·2 $N_n{}^r$ は亜群，$N_n{}^r(x,x)$ は群で共に代数的である．

$\Gamma_n{}^r$ の任意の元 (f,x_0) に対して実数の組

$$\xi:(b_j\,;\,a_j\,;\,a_i{}^j,\,a^j_{i_1i_2},\cdots,a^j_{i_1\cdots i_r}),\qquad j,i,i_1,\cdots i_r=1,\cdots,n \tag{4·5}$$

ただし $a^j_{i_1\cdots i_t}$ は $i_1,,\cdots,i_t$ について対称で $|a_i{}^j|\neq 0$

が関係式

$$b^j=f^j(a^1,\cdots,a^n),\ a^j=x^j(x_0),\ a^j_{i_1\cdots i_t}=\frac{\partial^t f^j}{\partial x^{i_1}\cdots\partial x^{i_t}}(a^1,\cdots,a^n) \tag{4·6}$$

で定まり，逆に (4·5) を任意に与えられたとき

$$f^j(x^h)=b^j+\sum_{t=1}^r\frac{1}{t!}\sum_{i_1,\cdots,i_t}a^j_{i_1\cdots i_t}(x^{i_1}-a^{i_1})\cdots(x^{i_t}-a^{i_t}) \tag{4·7}$$

なる写像 $f:R^n\to R^n$ は $|a_i{}^j|\neq 0$ ゆえ，x_0 の適当な近傍で C^∞ 級位相写像となる．しかも同じ (4·5) を与える他の g があれば $(f,x_0)\sim(g,x_0)$ となるから，(4·5) が $N_n{}^r$ の元であると見なしてよろしい．掛算のあるときそれを

表わす式は偏微分の公式から代数的に結合しあうこと明らかであるから，(4·5) の成分で N_n^r に自然な位相を入れれば代数的な位相亜群になる．

$R^n \ni x_0$ に対して原点 O を x_0 にうつす平行移動を

$$t_{x_0} : y^j = x^j + a^j, \quad a^j = x^j(x_0), \qquad j=1, \cdots, n \tag{4·8}$$

とすれば，明らかに

$$(t_{y_0}{}^{-1}, y_0)\Gamma_n{}^r(y_0, x_0)(t_{x_0}, 0) = \Gamma_n{}^r(0, 0) \tag{4·9}$$

であって，(4·5) で表わされる $\xi \in N_n{}^r(y_0, x_0)$ に対して

$$\theta_r(t_{y_0}{}^{-1}, y_0)\xi\theta_r(t_{x_0}, 0) = (0\,;\ 0\,;\ a_i{}^j, a^j_{i_1 i_2}, \cdots, a^j_{i_1\cdots i_r})$$

である．したがって

$$N_n{}^r(x_0, x_0) \approx N_n{}^r(0, 0) \equiv L_n{}^r \tag{4·10}$$

この $L_n{}^r$ を R^n における r 階1次変換群とよぼう．

つぎに $r \geqq t \geqq 1$ なる自然数 t に対して部分亜群としての関係

$$\Gamma_n{}^r \subset \Gamma_n{}^t \tag{4·11}$$

がある．$\Gamma_n{}^r \ni \alpha, \beta$ が $\Gamma_n{}^r$ で $\alpha \sim \beta$ ならば，定義から $\Gamma_n{}^t$ でも $\alpha \sim \beta$ である．亜群 $N_n{}^r$ から $N_n{}^t$ の上への自然な準同型対応

$$\lambda_{t,r} : N_n{}^r \to N_n{}^t \tag{4·12}$$

を $\lambda_{t,r}(\theta_r(\alpha)) = \theta_t(\alpha), \alpha \in \Gamma_n{}^r$ でつけることができる．実際 (4·5) で表わされる ξ に対して

$$\lambda_{t,r}(\xi) = (b^j\,;\ a^j\,;\ a_i{}^j, \cdots, a^j_{i_1\cdots i_t}) \tag{4·13}$$

である．

例 1　$L_n{}^1$ は n 次元の一般1次変換群 $GL(n)$ である．

例 2　$N_n{}^2$ の性質

$N_n{}^2 \ni \xi = (b^j\,;\ a^j\,;\ a_i{}^j, a^j_{i_1 i_2}), \eta = (c^j\,;\ b^j\,;\ b_i{}^j, b^j_{i_1 i_2})$ がそれぞれ $y^j = f^j(x^1, \cdots, x^n)$ と $y^j = g^j(x^1, \cdots, x^n)$ から定まったとすれば

$$\frac{\partial g^j(f(x))}{\partial x^i} = \sum \frac{\partial g^j}{\partial x^k}(f(x))\frac{\partial f^k}{\partial x^i}(x),$$

$$\frac{\partial^2 g^j(f(x))}{\partial x^{i_1}\,\partial x^{i_2}} = \sum \frac{\partial g^j}{\partial x^k}(f(x))\frac{\partial^2 f^k}{\partial x^{i_1}\partial x^{i_2}} + \sum \frac{\partial^2 g^j}{\partial x^{k_1}\partial x^{k_2}}(f(x))\frac{\partial f^{k_1}(x)}{\partial x^{i_1}}\frac{\partial f^{k_2}(x)}{\partial x^{i_2}}$$

であるから公式

$$\eta\xi=(c^j\,;\,a^j\,;\,\sum b_k{}^j a_i{}^k,\ \sum b_k{}^j a^k_{i_1i_2}+\sum b^j_{k_1k_2}a^{k_1}_{i_1}a^{k_2}_{i_2}) \tag{4·14}$$

を得る．$L_n{}^2$ の元を $\xi=(a_i{}^j,\ a^j_{i_1i_2})$ と表わせば

$$\xi^{-1}=(b_i{}^j,-\sum a^h_{k_1k_2}b_h{}^j b^{k_1}_{i_1}b^{k_2}_{i_2}),\qquad \sum b_k{}^j a_i{}^k=\delta_i{}^j \tag{4·15}$$

を得る．

$r\geqq t\geqq 1$ なる自然数 r,t に対して $N_n{}^r\times N_n{}^t$ の部分集合

$$K_n^{r,t}=\bigcup_{x,y,z\in R^n}N_n{}^r(z,y)\times N_n{}^t(y,x)$$

を考える．任意の $(\xi_r,\eta_t)\in K_n^{r,t}$ に対して $\lambda_{t,r}(\xi_r)\eta_t=\zeta_t\in N_n{}^t$ が定まるので，集合

$$K_n^{r,t}(x_0)=\bigcup_{y,z\in R^n}N_n{}^r(z,y)\times N_n{}^t(y,x_0) \tag{4·16}$$

は添字の集合を $\bigcup_{y\in R^n}N_n{}^t(y,x_0)$ として，つぎのような部分集合に類別することができる．

$$K_n^{r,t}(x_0)=\bigcup K_n^{r,t}(x_0,\zeta_t,\eta_t) \tag{4·17}$$

$$K_n^{r,t}(x_0,\zeta_t,\eta_t)=\{(\xi_r,\eta_t)\,|\,(\xi_r,\eta_t)\in K_n^{r,t}(x_0),\ \lambda_{t,r}(\xi_r)\eta_t=\zeta_t\}$$

しかるとき $K_n^{r,t}(x_0,\zeta_t{}',\eta_t{}')\ni(\xi_r{}',\eta_t{}')$ と $K_n^{r,t}(x_0,\zeta_t,\eta_t)\ni(\xi_r,\eta_t)$ の積を $\eta_t{}'=\zeta_t$ であるときに

$$(\xi_r{}',\eta_t{}')(\xi_r,\eta_t)=(\xi_r{}'\xi_r,\eta_t) \tag{4·18}$$

で定義すれば $K_n^{r,t}(x_0)$ は亜群をなすことが容易に証明できる．

問 1　$L_n{}^1$ は $L_n{}^r$ の部分群と見なすことができることを証明せよ．

問 2　$K_n^{r,t}(x_0)$ は上に述べた意味で亜群をなすことを証明せよ．

4·2　亜 群 の 表 現

前節で述べた亜群 M に対して対応 $\varphi: M\to GL(m)$ が $\varphi(\beta\alpha)=\varphi(\beta)\varphi(\alpha)$ なるとき，φ は M の $GL(m)$ の中への表現であるという．この節では亜群 $K_n^{2,1}(0)\equiv L_n^{2,1}$ の $GL(m)$ $(m=n,n+1,n+2)$ の中への表現を後の理論のために調べよう．計算を簡単にするために以下では総和記号 $\sum$ に関する **Einstein の規約**，すなわち $\sum$ の後に同一の添字が対となって現われたときには $\sum$ を省略する，を用いることにする．

まず $L_n{}^2$ の任意の元 $\xi=(a_i{}^j,\ a^j_{i_1i_2})$ の逆元を $\xi^{-1}=\bar{\xi}=(\bar{a}_i{}^j,\ \bar{a}^j_{i_1i_2})$ と表わし

$$\xi_i=\bar{a}_h{}^k a_{ki}^h \tag{4·19}$$

を定義する．$\eta=(b_i{}^j, b_{i_1i_2}^j)$, $\eta\xi=\zeta=(c_i{}^j, c_{i_1i_2}^j)$ とおいて (4·14) から

$$c_i{}^j=b_k{}^j a_i{}^k, \qquad c_{i_1i_2}^j=b_k{}^j a_{i_1i_2}^k+b_{k_1k_2}^j a_{i_1}^{k_1} a_{i_2}^{k_2}$$

であり，$\bar{c}_i{}^j=\bar{a}_k{}^j \bar{b}_i{}^k$ となるから

$$\zeta_{i_2}=\bar{c}_j^{i_1} c_{i_1i_2}^j=\bar{a}_h^{i_1}\bar{b}_j{}^h(b_k{}^j a_{i_1i_2}^k+b_{k_1k_2}^j a_{i_1}^{k_1} a_{i_2}^{k_2})=\xi_{i_2}+\eta_{k_2} a_{i_2}^{k_2}$$

よって公式

$$(\eta\xi)_i=\xi_i+\eta_k a_i{}^k \tag{4·20}$$

を得る．また単位元に対するこの量の成分はすべて 0 であるから

$$\xi_i+(\xi^{-1})_k a_i{}^k=0 \tag{4·21}$$

さて $L_n^{2,1}$ の元 ξ は前節によって $(b^j\,;\,a^j\,;\,a_i{}^j, a_{i_1i_2}^j)$ と $(a^j\,;\,0\,;\,\alpha_i{}^j)$ のような $N_n{}^2$ と $N_n{}^1$ の元の組であるから，これを

$$\xi=(b^j\,;\,a^j\,;\,a_i{}^j, a_{i_1i_2}^j\,;\,\alpha_i{}^j), \quad |a_i{}^j|\neq 0, |\alpha_i{}^j|\neq 0 \tag{4·22}$$

のように表わし，n 個の成分をもつ ξ_i を同様に (4·19) によって定義しよう．

$$\eta=(c^j\,;\,b^j\,;\,b_i{}^j, b_{i_1i_2}^j\,;\,\beta_i{}^j), \qquad \beta_i{}^j=a_k{}^j\alpha_i{}^k \tag{4·23}$$

と ξ との積は定義によって

$$\eta\xi=\zeta=(c^j\,;\,a^j\,;\,b_k{}^j a_i{}^k, b_k{}^j a_{i_1i_2}^k+b_{k_1k_2}^j a_{i_1}^{k_1} a_{i_2}^{k_2}\,;\,\alpha_i{}^j) \tag{4·24}$$

であり，ξ_i に対しては (4·20), (4·21) が成立することは明らかである．

$L_n^{2,1}$ の $GL(n)$ の中への最も代表的な表現 $\varphi_0 : L_n^{2,1}\to GL(n)$ は

$$\varphi_0(\xi)=\varphi_0(b^j\,;\,a^j\,;\,a_i{}^j, a_{i_1i_2}^j\,;\,\alpha_i{}^j)=|a_k{}^h|^W((a_i{}^j)) \tag{4·25}$$

であることは (4·22)～(4·24) を見れば明らかである．

$L_n^{2,1}$ の $GL(n+1)$ の中への表現に条件を入れて考えよう．$GL(n+1)$ の要素はベクトル空間としての R^{n+1} に作用し，R^{n+1} の座標系を $x^0, \cdots, x^n$, 基ベクトルを $\delta_\lambda=(\delta_\lambda{}^0, \delta_\lambda{}^1, \cdots, \delta_\lambda{}^n)$, $\lambda=0, 1, \cdots, n$ とする．R^n は $x^0=0$ なる部分空間と見ることにしよう．表現 $\varphi : L_n^{2,1}\to GL(n+1)$ が

$$\varphi(\xi)=\begin{pmatrix}\rho_0(\xi) & \rho_0(\xi)v_i(\xi)\\ 0 & \rho(\xi)a_i{}^j\end{pmatrix}$$

なるものとする．行列の掛算によって

$$\varphi(\eta)\varphi(\xi)=\begin{pmatrix}\rho_0(\eta) & \rho_0(\eta)v_i(\eta)\\ 0 & \rho(\eta)b_i{}^j\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\rho_0(\xi) & \rho_0(\xi)v_i(\xi)\\ 0 & \rho(\xi)a_i{}^j\end{pmatrix}$$
$$=\varphi(\eta\xi)$$

から，つぎの関係式が ρ_0, ρ, v_i に対して成り立てば φ は表現となる．

$$\rho_0(\eta\xi)=\rho_0(\eta)\rho_0(\xi),\quad \rho(\eta\xi)=\rho(\eta)\rho(\xi)$$

$$v_i(\eta\xi)=v_i(\xi)+\frac{\rho(\xi)}{\rho_0(\xi)}v_k(\eta)a_i{}^k$$

したがって，(4·20) を比べるとつぎの式で与えられる φ は表現となる．

$$\varphi(\xi)=|a_h{}^k|^w\begin{pmatrix}1 & c\xi_i\\ 0 & a_i{}^j\end{pmatrix}\tag{4·26}$$

$$\xi=(b^j\,;\,a^j\,;\,a_i{}^j,a^j_{i_1i_2}\,;\,\alpha_i{}^j),\qquad c=\text{定数}$$

この式の ξ を $L_n{}^2$ の元とみれば，このまま群 $L_n{}^2$ の表現になっている．

最後に $L_n^{2,1}$ の $GL(n+2)$ の中への表現を考えよう．$GL(n+2)$ の要素は R^{n+2} に作用し，R^{n+2} の座標系を $x^0, x^1, \cdots, x^n, x^\infty$，基ベクトルを $\delta_A=(\delta_A{}^0, \delta_A{}^1, \cdots, \delta_A{}^n, \delta_A{}^\infty)$, $A=0, 1, \cdots, n, \infty$ とする R^{n+1} は $x^0=0$，R^n は $x^0=x^\infty=0$ なる部分空間と見ることにしよう．表現 $\varphi: L_n^{2,1}\to GL(n+2)$ が

$$\varphi(\xi)=\begin{pmatrix}\rho_0(\xi) & \rho_0(\xi)v_i{}^0(\xi) & \rho_0(\xi)v_\infty{}^0(\xi)\\ 0 & \rho(\xi)a_i{}^j & \rho(\xi)v_\infty{}^j(\xi)\\ 0 & 0 & \rho_\infty(\xi)\end{pmatrix}$$

の形をしているとすれば，$\rho_0, \rho, \rho_\infty, v_i{}^0, v_\infty{}^j, v_\infty{}^0$ が

$$\rho_0(\zeta)=\rho_0(\eta)\rho_0(\xi),\quad \rho(\zeta)=\rho(\eta)\rho(\xi),\quad \rho_\infty(\zeta)=\rho_\infty(\eta)\rho_\infty(\xi)$$

$$v_i{}^0(\zeta)=v_i{}^0(\xi)+\frac{\rho(\xi)}{\rho_0(\xi)}v_k{}^0(\eta)a_i{}^k$$

$$v_\infty{}^0(\zeta)=v_\infty{}^0(\xi)+\frac{\rho(\xi)}{\rho_0(\xi)}v_k{}^0(\eta)v_\infty{}^k(\xi)+\frac{\rho_\infty(\xi)}{\rho_0(\xi)}v_\infty{}^0(\eta)\tag{4·27}$$

$$v_\infty{}^j(\zeta)=b_k{}^j v_\infty{}^k(\xi)+\frac{\rho_\infty(\xi)}{\rho(\xi)}v_\infty{}^j(\eta),\qquad \zeta=\eta\xi$$

であるとき表現となる．さてわれわれは

$$v_i{}^0(\xi)=c\xi_i,\quad c=\text{定数},\quad \rho_0(\xi)=\rho(\xi),\quad v_\infty{}^j(\xi)=M^{ji}(\xi)\xi_i$$

とおいてみれば，(4·20) により上記の条件式の第2行目の関係が満足せられ，最後の条件式は

$$M^{ji}(\zeta)(\xi_i+\eta_k a_i{}^k)=b_k{}^j M^{ki}(\xi)\xi_i+\frac{\rho_\infty(\xi)}{\rho(\xi)}M^{jk}(\eta)\eta_k$$

$$(M^{ji}(\zeta)-b_k{}^j M^{ki}(\xi))\xi_i=\left(\frac{\rho_\infty(\xi)}{\rho(\xi)}M^{jk}(\eta)-M^{ji}(\zeta)a_i{}^k\right)\eta_k$$

となるので，もしも $M^{ji}(\xi)$ が

$$M^{ji}(\zeta)=b_k{}^j M^{ki}(\xi),\qquad \frac{\rho_\infty(\xi)}{\rho(\xi)}M^{jk}(\eta)=M^{ji}(\zeta)a_i{}^k$$

であれば満足される．そこで

$$L^{ki}(\xi)=\bar{a}_h{}^k M^{hi}(\xi)$$

とおくと，上に述べた関係は容易にわかるように

$$L^{ji}(\zeta)=L^{ji}(\xi),\qquad L^{ji}(\eta)=\frac{\rho(\xi)}{\rho_\infty(\xi)}a_k{}^j a_h{}^i L^{kh}(\xi)\qquad (4·28)$$

となる．(4·27) の第3行目の関係式は

$$v_\infty{}^0(\zeta)=v_\infty{}^0(\xi)+\frac{\rho_\infty(\xi)}{\rho(\xi)}v_\infty{}^0(\eta)+ca_h{}^k L^{hi}(\xi)\eta_k\xi_i$$

と書ける．さて

$$\rho(\xi)=|a_i{}^j|^W,\qquad \rho_\infty(\xi)=|a_i{}^j|^{W+q}\qquad (4·29)$$

とおけば (4·27) の第1行目は満足される．ξ と ζ の成分を比較し，(4·28) の第1式をみると $L^{ji}(\xi)$ は ξ の成分の中の $\alpha_i{}^j, a^j$ のみに関係しなければならない．そこでとくに，$\alpha_i{}^j=\delta_i{}^j$ とおいてみると $\eta=(c^j\,;\,b^j\,;\,b_i{}^j, b^j_{i_1i_2}\,;a_i{}^j)$ であって，このときの $L^{ji}(\xi)$ を L^{ji} と表わせば，(4·28) の第2式から

$$L^{ji}(\eta)=|a_h{}^k|^{-q}a_k{}^j a_h{}^i L^{kh}$$

したがって

$$L^{ji}(\xi)=|\alpha_h{}^k|^{-q}\alpha_k{}^j\alpha_h{}^i L^{kh},\quad \xi=(b^j\,;\,a^j\,;\,a_i{}^j, a^j_{i_1i_2}\,;\,\alpha_i{}^j)\qquad (4·30)$$

としてよろしい．実際このように定義して，(4·28) の第2式は

$$L^{ji}(\eta)=|\beta_h{}^k|^{-q}\beta_k{}^j\beta_h{}^iL^{kh}=|a_h{}^k|^{-q}|\alpha_h{}^k|^{-q}a_m{}^ja_l{}^i\alpha_k{}^m\alpha_h{}^lL^{kh}$$
$$=|a_h{}^k|^{-q}a_m{}^ja_l{}^iL^{ml}(\xi)$$

となって満足される．つぎに

$$L^{ji}=L^{ij} \tag{4·31}$$

と仮定して (4·28) と (4·20) を用いると

$$L^{ji}(\zeta)\zeta_j\zeta_i=L^{ji}(\xi)(\xi_j+\eta_ka_j{}^k)(\xi_i+\eta_ha_i{}^h)$$
$$=L^{ji}(\xi)\xi_j\xi_i+|a_h{}^k|^qL^{ji}(\eta)\eta_j\eta_i+a_j{}^kL^{ji}(\xi)\eta_k\xi_i+a_i{}^hL^{ji}(\xi)\xi_j\eta_h$$

であるから

$$v_{\infty}{}^0(\xi)=\frac{c}{2}L^{ji}(\xi)\xi_j\xi_i \tag{4·32}$$

とおけば (4·27) の第3行目の関係も満足される．以上をまとめると，表現 $\varphi: L_n^{2,1}\to GL(n+2)$ としてつぎのようなものが得られた．

$$\varphi(\xi)=|a_i{}^j|^W\begin{pmatrix}1 & c\xi_i & \frac{c}{2}L^{kh}(\xi)\xi_k\xi_h\\ 0 & a_i{}^j & a_k{}^jL^{kh}(\xi)\xi_h\\ 0 & 0 & |a_h{}^k|^q\end{pmatrix} \tag{4·33}$$

$$\xi=(b^j\,;\,a^j\,;\,a_i{}^j,a^j_{i_1i_2}\,;\,\alpha_i{}^j)\in L_n^{2,1},\qquad L^{ji}(\xi)=|\alpha_h{}^k|^{-q}\alpha_k{}^j\alpha_h{}^iL^{kh}$$
$$c=\text{定数},\quad L^{ji}=L^{ij}=\text{定数}$$

4·3　ベクトル・バンドルの構成

X を n 次元の C^r 級多様体とし，その C^r 級座標近傍系を $\mathfrak{S}=\{(U_\lambda,u_\lambda)\}$ とする．m 次元のベクトル空間 Y をファイバー，$L(Y)\approx GL(m)$ の Lie 部分群（群として部分群で，部分集合として部分多様体）G をバンドルの群，X を底空間とするベクトル・バンドル $\mathfrak{F}=\{Z,X,\pi,Y,G,U_\lambda,\varphi_\lambda\}$ を考える．2·5 で述べたように，このようなファイバー・バンドルは $\mathfrak{F}$ の座標変換

$$g_{\mu\lambda}: U_\lambda\cap U_\mu\to G,\quad U_\lambda\cap U_\mu\neq\phi \tag{2·28}$$

で定まるのであるが，微分可能多様体としての X の上で，このようなものの構成方法を考えてみよう．(2·4 で述べた X の上の接テンソル・バンドルはここでいうベクトル・バンドルの一種である)

$U_\lambda \cap U_\mu \neq \phi$ なる座標近傍の組（U_λ, U_μ）に対して対応

$$\tau^t_{\mu\lambda} : U_\lambda \cap U_\mu \to N_n{}^t \tag{4·34}$$

を

$$\tau^t_{\mu\lambda}(x) = \theta_t(u_\mu \cdot u_\lambda{}^{-1}, u_\lambda(x)) \in N_n{}^t$$

で定義すると，$\tau^t_{\mu\lambda}$ は C^{r-t} 級の写像である．ただし $u_\mu \cdot u_\lambda{}^{-1}$ は u_λ を点 x の適当な近傍にかぎってつくるものとする．しかるとき $x \in U_\lambda \cap U_\mu \cap U_\nu$ に対しては亜群 $N_n{}^t$ での積の定義から

$$\begin{aligned}\tau^t_{\nu\mu}(x)\tau^t_{\mu\lambda}(x) &= \theta_t(u_\nu \cdot u_\mu{}^{-1}, u_\mu(x))\theta_t(u_\mu \cdot u_\lambda{}^{-1}, u_\lambda(x)) = \theta_t(u_\nu \cdot u_\lambda{}^{-1}, u_\lambda(x)) \\ &= \tau^t_{\nu\lambda}(x)\end{aligned}$$

すなわち（2·29）と類似の関係式

$$\tau^t_{\nu\mu}(x)\tau^t_{\mu\lambda}(x) = \tau^t_{\nu\lambda}(x) \tag{4·35}$$

が成り立つ．$\tau^t_{\mu\lambda}$ は $U_\lambda \cap U_\mu$ における座標系 u_λ から座標系 u_μ への移行の相対的変化を表わす一種の尺度と見なすことができるが，各々の座標近傍はその中に考慮されていない．例えば平面上の順序のついた2点 P, Q に対して，始点 P や終点 Q は問わないでベクトル $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ のみ考えたようなものである．定点 O をとり，点 P の位置ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を考えれば，始点 P が定まるように，組（U_λ, U_μ）の第1の座標近傍（U_λ, u_λ）をある固定された座標近傍（U_σ, u_σ）との関係でとらえることにすれば，$U_\lambda \cap U_\mu \cap U_\sigma \neq \phi$ なる座標近傍の組（$U_\lambda, U_\mu; U_\sigma$）に対して対応

$$\tau^{t,s}_{\mu\lambda,\sigma} : U_\lambda \cap U_\mu \cap U_\sigma \to K_n^{t,s} \tag{4·36}$$

を

$$\tau^{t,s}_{\mu\lambda,\sigma}(x) = (\theta_t(u_\mu \cdot u_\lambda{}^{-1}, u_\lambda(x)), \theta_s(u_\lambda \cdot u_\sigma{}^{-1}, u_\sigma(x))) \in K_n^{t,s}(u_\sigma(x)) \subset K_n^{t,s}$$

で定義すると，これは C^{r-t} 級写像であって，しかも $U_\lambda \cap U_\mu \cap U_\nu \cap U_\sigma \neq \phi$ ならば，そこでは $\tau^{t,s}_{\mu\lambda,\sigma}(x)$ も $\tau^{t,s}_{\nu\mu,\sigma}(x)$ も亜群 $K_n^{t,s}(u_\sigma(x))$ に属し，掛算が定義されている2元であるから

$$\tau^{t,s}_{\nu\mu,\sigma}(x)\tau^{t,s}_{\mu\lambda,\sigma}(x)$$

$$=(\theta_t(u_\nu\cdot u_\mu^{-1},\ u_\mu(x))\theta_t(u_\mu\cdot u_\lambda^{-1},\ u_\lambda(x)),\ \theta_s(u_\lambda\cdot u_\sigma^{-1}, u_\sigma(x)))$$

$$=(\theta_t(u_\nu\cdot u_\lambda^{-1}, u_\lambda(x)), \theta_s(u_\lambda\cdot u_\sigma^{-1}, u_\sigma(x))=\tau_{\nu\lambda,\sigma}^{t,s}(x)$$

すなわち

$$\tau_{\nu\mu,\sigma}^{t,s}(x)\tau_{\mu\lambda,\sigma}^{t,s}(x)=\tau_{\nu\lambda,\sigma}^{t,s}(x) \tag{4·37}$$

さて

$$\bigcup_{x\in U_\sigma} x\times K_n^{t,s}(u_\sigma(x))=A_\sigma\subset U_\sigma\times K_n^{t,s}$$

なる A_σ は容易に証明できるように $U_\sigma\times K_n^{t,s}$ の C^{r-t} 級の部分多様体である．つぎの性質をもつ C^{r-t} 級写像

$$\chi_\sigma : A_\sigma \to GL(m) \tag{4·38}$$

があると仮定しよう．

(i) $\chi_{\sigma,x}((\xi,\eta))=\chi_\sigma(x,(\xi,\eta)),\quad x\in U_\sigma,\quad (\xi,\eta)\in K_n^{t,s}(u_\sigma(x))$

は亜群 $K_n^{t,s}(u_\sigma(x))$ の表現である．

(ii)
$$\chi_{\sigma,x}(\tau_{\mu\lambda,\sigma}^{t,s}(x))=g_{\mu\lambda}(x),\qquad x\in U_\lambda\cap U_\mu \tag{4·39}$$

は $x\in U_\sigma$ なる U_σ に関係しない

このようにして得られる写像 $g_{\mu\lambda}: U_\lambda\cap U_\mu\to GL(m)$ は C^{r-t} 級であって，(i) と (4·37) からベクトル・バンドルの座標変換となり得るものであることは明らかである．

注意 上の条件 (ii) は $g_{\mu\lambda}$ が U_μ の U_λ に対する相対的関係と，U_λ のみに依存し，U_λ を捉えるための中心 U_σ の選び方に関係しないことを要求したもので，抽象的に議論をする場合にははじめから $g_{\mu\lambda}$ を (2·29) をみたすものとしてやって差支えないが，具体例を構成する場合には上に述べたように，具体的な亜群である $N_n^t, K_n^{t,s}$ 等を通じておくほうが構成の手がかりを得易いことは，前節の推論をかえりみても明らかである．

4·4 ベクトル・バンドルとその主ファイバー・バンドル

前節で考えたベクトル・バンドル $\mathfrak{F}$ において Z は C^{r-t} 級の多様体，射影 $\pi: Z\to X$，座標函数 $\varphi_\lambda: U_\lambda\times Y\to\pi^{-1}(U_\lambda)$，座標変換 $g_{\mu\lambda}: U_\lambda\cap U_\mu\to G$ は C^{r-t} 級写像であるとする．2·5 で述べたように，$\mathfrak{F}$ の連合主ファイバー・バンドル $\tilde{\mathfrak{F}}$ は $\mathfrak{F}$ のすべての許容写像の集まりをバンドル空間にもつフ

ファイバー・バンドルであったが，$g_{\mu\lambda}$ を写像 $g_{\mu\lambda}: U_\lambda \cap U_\mu \to GL(m)(\supset G)$ と見なしてできる連合主ファイバー・バンドルを $\tilde{\mathfrak{F}}=\{B, X, \tilde{\pi}, GL(m), GL(m), U_\lambda, \tilde{\varphi}_\lambda\}$ で表わすことにしよう．Y の基 $\{y_1, \cdots, y_m\}$ を一つとって固定して，Y の上の同型写像のつくる変換群 $L(Y)$ はこの基に関して表わしたとき，m 次元の一般1次変換群 $GL(m)$ になっているものと考えよう．

$$z_{(\lambda)\alpha}(x)=\varphi_\lambda(x, y_\alpha), \qquad x \in U_\lambda, \quad \alpha=1,2,\cdots,m \tag{4·40}$$

は点 x の上の $\mathfrak{F}$ のファイバー $Y_x=\pi^{-1}(x)$ の基をなす．$U_\lambda \cap U_\mu \neq \phi$ ならば (2·28) によって

$$z_{(\lambda)\alpha}(x)=\varphi_\mu(x, g_{\mu\lambda}(x)y_\alpha), \qquad x \in U_\lambda \cap U_\mu$$

さて上に述べた $L(Y) \approx GL(m)$ のつけ方に対する約束によれば，$L(Y) \ni g$ は $(a_\alpha{}^\beta)$ なる正則 m 次正方行列で表わされ

$$gy_\alpha = y_\beta a_\alpha^\beta(g) \tag{4·41}$$

であるから

$$z_{(\lambda)\alpha}(x)=\varphi_\mu(x, y_\beta a_\alpha^\beta(g_{\mu\lambda}(x)))=\varphi_\mu(x, y_\beta)a_\alpha^\beta(g_{\mu\lambda}(x))$$

すなわち

$$z_{(\lambda)\alpha}(x)=z_{(\mu)\beta}(x)a_\alpha^\beta(g_{\mu\lambda}(x)). \tag{4·42}$$

Y_x の基を点 x における $\mathfrak{F}$ の**標構**とよぼう．Y の基 $\{y_\alpha\}$ を Y_x の任意の基にうつす写像はバンドルの群 $GL(m)$ の意味での許容写像を定める．逆に任意の許容写像は Y_x の基を定めるから，B は $\tilde{\mathfrak{F}}$ のすべての標構から成り立っているとしてよろしい．すなわち $B \ni b=\tilde{\varphi}_\lambda(x, g)$ に対して (2·34) から

$$z_\alpha(b) \equiv b(y_\alpha)=\varphi_\lambda(x, gy_\alpha)=\varphi_\lambda(x, y_\beta a_\alpha^\beta(g))=z_{(\lambda)\beta}(x)a_\alpha^\beta(g) \tag{4·43}$$

である．主ファイバー・バンドルの右移動 $r(g_0), g_0 \in GL(m)$ は定義によって $bg_0 \equiv r(g_0)(b)=\tilde{\varphi}_\lambda(x, gg_0)$ であるから $z_\alpha(bg_0)=z_{(\lambda)\beta}(x)a_\alpha^\beta(gg_0)=z_{(\lambda)\beta}(x) a_\gamma^\beta(g)a_\alpha^\gamma(g_0)=z_\beta(b)a_\alpha^\beta(g_0)$ すなわち

$$z_\alpha(bg_0)=z_\beta(b)a_\alpha^\beta(g_0) \tag{4·44}$$

が成立する．以上の事がらを準備して $\tilde{\varphi}_\lambda | U_\lambda \times G=\hat{\varphi}_\lambda$, $\hat{B}=\bigcup_\lambda \tilde{\varphi}_\lambda(U_\lambda \times G)$, $\hat{\pi}=\tilde{\pi}|\hat{B}$ なる $\tilde{\mathfrak{F}}$ の部分を考えると，これが $\mathfrak{F}$ の連合主ファイバー・バンドル $\hat{\mathfrak{F}}$

となる．実際 (4·42) の $g_{\mu\lambda}(x)$ は G の元であるから，$\hat{B}\cap\tilde{\pi}^{-1}(x)=G_x$ は $\tilde{\varphi}_\lambda(x,e)$ に右移動 $r(g), g\in G$ をほどこして出る像の集合となる．このことから上に述べたことは容易に証明することができる．

4·5 ベクトル・バンドルにおける共変微分

2·4 と 3·1 で述べた X の共変接ベクトルのつくる接テンソル・バンドルを簡単に $T^*(X)=T_1^0(X)$ で表わそう．X の開部分集合 N における $\mathfrak{F}$ の C^l 級切断 ($l\leqq r-t$) の全体は実数体の上のベクトル空間をなしているが，これはまた N の上の C^l 級スカラー場全体のつくる環の上のベクトル空間とみなすこともできる．すなわち ξ_1,ξ_2 を $\mathfrak{F}$ の切断，f_1,f_2 をスカラー場として $f_1\xi_1+f_2\xi_2$ を

$$(f_1\xi_1+f_2\xi_2)(x)=f_1(x)\xi_1(x)+f_2(x)\xi_2(x),\qquad x\in N$$

で定義する．これを $\Psi^l(\mathfrak{F},N)$ で表わそう．簡単に $\Psi^l(\mathfrak{F},X)=\Psi^l(\mathfrak{F})$ とおく．

さて $\Psi^l(\mathfrak{F})$ から $\Psi^{l-1}(\mathfrak{F}\otimes T^*(X))$ への線型写像（実数体の上のベクトル空間として）

$$D:\Psi^l(\mathfrak{F})\to\Psi^{l-1}(\mathfrak{F}\otimes T^*(X))\tag{4·45}$$

が，任意の $\xi\in\Psi^l(\mathfrak{F})$ と任意の C^l 級スカラー場 f に対してつぎの条件

$$D(f\xi)=fD\xi+\xi\otimes df\tag{4·46}$$

をみたすとき，$\mathfrak{F}$ における共変微分とよぶ．D は切断に対する作用素であるから $\Psi^l(\mathfrak{F},N)$ に対してそのまま適用できる．逆に X の開被覆 $\{N_\sigma\}$ の各 N_σ の上でのこのような共変微分 $D_\sigma:\Psi^l(\mathfrak{F},N_\sigma)\to\Psi^{l-1}(\mathfrak{F}\otimes T^*(X),N_\sigma))$ があって，$N_\sigma\cap N_\tau\neq\phi$ において D_σ と D_τ が一致するとき，X における共変微分 D が，それから N_σ 上に誘導される共変微分がちょうど D_σ となるように定まることは明らかである．

U_λ 上の切断 $z_{(\lambda)\alpha}$ に対しては，3·1 の記号を用いると

$$Dz_{(\lambda)\alpha}=z_{(\lambda)\beta}\otimes\omega_{(\lambda)\alpha}^{\ \ \beta}\tag{4·47}$$

である $\omega_{\alpha(\lambda)}^{\beta}\in\Psi^{r-t-1}(T^*(X),U_\lambda)=\Phi^{r-t-1}(U_\lambda)$ (3·1 での記号) が定まらねばならない．しかも (4·42) と (4·46) とから $U_\lambda\cap U_\mu\neq\phi$ においては

$$Dz_{(\lambda)\alpha}=(Dz_{(\mu)\beta})a_{\alpha}^{\beta}\cdot g_{\mu\lambda}+z_{(\mu)\beta}\otimes d(a_{\alpha}^{\beta}\cdot g_{\mu\lambda})$$
$$=z_{(\mu)\beta}\otimes(d(a_{\alpha}^{\beta}\cdot g_{\mu\lambda})+\omega_{(\mu)\gamma}^{\beta}(a_{\alpha}^{\gamma}\cdot g_{\mu\lambda}))$$
$$=z_{(\lambda)\beta}\otimes\{(a_{\gamma}^{\beta}\cdot g_{\lambda\mu})(d(a_{\alpha}^{\gamma}\cdot g_{\mu\lambda})+\omega_{(\mu)\delta}^{\gamma}(a_{\alpha}^{\delta}\cdot g_{\mu\lambda}))\}$$

であるから，$\{\omega_{(\lambda)\alpha}^{\beta}\}$ に対してつぎの関係式

$$\omega_{(\lambda)\alpha}^{\beta}=(a_{\gamma}^{\beta}\cdot g_{\lambda\mu})(d(a_{\alpha}^{\gamma}\cdot g_{\mu\lambda})+\omega_{(\mu)\delta}^{\gamma}(a_{\alpha}^{\delta}\cdot g_{\mu\lambda})) \tag{4·48}$$

が成立しなければならない．$g_{\lambda\mu}(x)g_{\mu\lambda}(x)=e$ ゆえ，$a_{\gamma}^{\beta}(g_{\lambda\mu}(x))a_{\alpha}^{\gamma}(g_{\mu\lambda}(x))=\delta_{\alpha}{}^{\beta}$．よって上の式は

$$d(a_{\alpha}^{\beta}\cdot g_{\mu\lambda})=(a_{\gamma}^{\beta}\cdot g_{\mu\lambda})\omega_{(\lambda)\alpha}^{\gamma}-\omega_{(\mu)\gamma}^{\beta}(a_{\alpha}^{\gamma}\cdot g_{\mu\lambda}) \tag{4·48$'$}$$

とも表わすことができる．

定理 4·3 各 U_λ 上に (4·48) を満足する微分形式系 $\omega_{(\lambda)\alpha}^{\beta}\in\Phi^{r-t-1}(U_\lambda)$ が与えられれば $\mathfrak{F}$ に共変微分が一意に定まる．

（証明） $Y_x\ni z$ は $x\in U_\lambda$ として $z=z_{(\lambda)\alpha}(x)v_{(\lambda)}^{\alpha}$ と表わされる．さらに $x\in U_\mu$ であれば $z=z_{(\mu)\beta}(x)v_{(\mu)}^{\beta}$ として

$$v_{(\mu)}^{\beta}=a_{\alpha}^{\beta}(g_{\mu\lambda}(x))v_{(\lambda)}^{\alpha}$$

である．さて U_λ において $\omega_{(\lambda)\alpha}^{\beta}$ から (4·47) で与えられる共変微分を D_λ と表わす．任意の $\xi\in\Psi^{l}(\mathfrak{F})$ が U_λ では $\xi=z_{(\lambda)\alpha}v_{(\lambda)}^{\alpha}$ と書けるから $U_\lambda\cap U_\mu\neq\phi$ においては

$$D_\lambda\xi=z_{(\lambda)\beta}\otimes\{dv_{(\lambda)}^{\beta}+\omega_{(\lambda)\alpha}^{\beta}v_{(\lambda)}^{\alpha}\}$$
$$=z_{(\mu)\rho}(a_{\beta}^{\rho}\cdot g_{\mu\lambda})\otimes\{dv_{(\lambda)}^{\beta}+(a_{\gamma}^{\beta}\cdot g_{\lambda\mu})(d(a_{\alpha}^{\gamma}\cdot g_{\mu\lambda})+\omega_{(\mu)\delta}^{\gamma}(a_{\alpha}^{\delta}\cdot g_{\mu\lambda}))v_{(\lambda)}^{\alpha}\}$$
$$=z_{(\mu)\rho}\otimes\{a_{\beta}^{\rho}\cdot g_{\mu\lambda}dv_{(\lambda)}^{\beta}+d(a_{\alpha}^{\rho}\cdot g_{\mu\lambda})v_{(\lambda)}^{\alpha}+\omega_{(\mu)\delta}^{\rho}v_{(\mu)}^{\delta}\}$$
$$=z_{(\mu)\rho}\otimes\{dv_{(\mu)}^{\rho}+\omega_{(\mu)\delta}^{\rho}v_{(\mu)}^{\delta}\}=D_\mu\xi$$

となるから，前記の理由により X における $\mathfrak{F}$ の共変微分 D が定まる．（終）

さて $\omega_{(\lambda)\alpha}^{\beta}$ は座標近傍 (U_λ, u_λ) における微分形式であるから

$$\omega_{(\lambda)\alpha}^{\beta}=\Gamma_{(\lambda)i\alpha}^{\beta}du_{\lambda}^{i} \tag{4·49}$$

なる形に表わされる．$\Gamma_{(\lambda)i\alpha}^{\beta}$ が U_λ の各点において n 個の m 次正方行列を定めるが

$$(\Gamma_{(\lambda)i\alpha}^{\beta})\in L(G),\qquad i=1,2,\cdots,n \tag{4·50}$$

であるときに，(4·48) を満足する微分形式 $\omega_{(\lambda)}{}_{\alpha}^{\beta}$ からなる系はバンドルの群を G と考えたときの $\mathfrak{F}$ の接続，あるいは単に $\mathfrak{F}$ の**接続**を定義するといい，$\Gamma_{(\lambda)}{}_{i\alpha}^{\beta}$ は座標系 $u_\lambda^1, \cdots, u_\lambda^n$ に関する**接続の係数**とよばれる．

D の核に属する元，すなわち $D\xi=0$ であるような ξ はこの接続に関して**平行**であるという．もちろん，この核は実数体上のベクトル空間をなしている．

4·6 接続と主ファイバー・バンドル

$GL(m)$ の上の函数 b_α^β を式

$$b_\alpha^\beta(g)=a_\alpha^\beta(g^{-1}), \qquad g\in GL(m) \tag{4·51}$$

で定義しておく．座標近傍 U_λ 上で $\tilde{\mathfrak{F}}$ の C^l 級切断，すなわち標構場 $f: U_\lambda \to B$

$$b=f(x)=(x, z_\alpha(x)), \qquad \tilde{\pi}\cdot f=1$$

が与えられているとする．ところで，これは $f(x)=\tilde{\varphi}_\lambda(x, h(x)), h: U_\lambda\to GL(m)$ と表わされ，$z_\alpha=z_{(\lambda)\beta}(a_\alpha^\beta\cdot h), z_{(\lambda)\alpha}=z_\beta(b_\alpha^\beta\cdot h)$ であるから

$$\begin{aligned} Dz_\alpha&=z_{(\lambda)\beta}\otimes d(a_\alpha^\beta\cdot h)+Dz_{(\lambda)\beta}(a_\alpha^\beta\cdot h)\\ &=z_\beta\otimes(b_\gamma^\beta\cdot h)\,(d(a_\alpha^\gamma\cdot h)+\omega_{(\lambda)}{}_\rho^\gamma(a_\alpha^\rho\cdot h)) \end{aligned}$$

$b_\gamma^\beta(da_\alpha^\gamma+\omega_{(\lambda)}{}_\rho^\gamma a_\alpha^\rho)$ を $U_\lambda\times GL(m)$ 上の微分形式であると考て，$\tilde{\pi}^{-1}(U_\lambda)$ 上の微分形式

$$\theta_\alpha^\beta=(\tilde{\varphi}_\lambda{}^{-1})^*(b_\gamma^\beta(da_\alpha^\gamma+\omega_{(\lambda)}{}_\rho^\gamma a_\alpha^\rho) \tag{4·52}$$

を定義すれば，$\tilde{\varphi}_\lambda{}^{-1}\cdot f(x)=(x, h(x))$ であるから (3·10) を用いると

$$\begin{aligned} f^*\theta_\alpha^\beta&=(\tilde{\varphi}_\lambda{}^{-1}\cdot f)^*(b_\gamma^\beta(da_\alpha^\gamma+\omega_{(\lambda)}{}_\rho^\gamma a_\alpha^\rho))\\ &=(b_\gamma^\beta\cdot h)\,(d(a_\alpha^\gamma\cdot h)+\omega_{(\lambda)}{}_\rho^\gamma(a_\alpha^\rho\cdot h)) \end{aligned}$$

となる．したがって上に計算した式は

$$Dz_\alpha=z_\beta\otimes f^*\theta_\alpha^\beta \tag{4·53}$$

と表わされる．ただし，写像 f^* は $f: U_\lambda\to\tilde{\pi}^{-1}(U_\lambda)$ と見なしての関係であるが，以下に証明するように θ_α^β は B 上の微分形式と考えられるので，$f: U_\lambda\to B$ として成り立つのである．実際 θ_α^β は B 上で定まることを示そう．

$U_\lambda \cap U_\mu \neq \phi$ として，$(U_\lambda \cap U_\mu)\times GL(m)$ 上の C^{r-t} 級写像 $h_{\mu\lambda}$ を $h_{\mu\lambda}(x, g) = (x, g_{\mu\lambda}(x)g)$ で定義する．$\tilde{\varphi}_\lambda(x, g)=\tilde{\varphi}_\mu(x, g_{\mu\lambda}(x)g)$，$x \in U_\lambda \cap U_\mu, g \in GL(m)$ であるから $\tilde{\varphi}_\mu{}^{-1}=h_{\mu\lambda}\cdot\tilde{\varphi}_\lambda{}^{-1}$ となる．よって

$$(\tilde{\varphi}_\mu{}^{-1})^*(b^\beta_\gamma(da^\gamma_\alpha+\omega_{(\mu)}{}^\gamma_\rho a^\rho_\alpha))=(\tilde{\varphi}_\lambda{}^{-1})^*(h_{\mu\lambda})^*(b^\beta_\gamma(da^\gamma_\alpha+\omega_{(\mu)}{}^\gamma_\rho a^\rho_\alpha))$$

定理 2·7 および (4·48) を用いると

$$\begin{aligned}
&(h_{\mu\lambda})^*(b^\beta_\gamma(da^\gamma_\alpha+\omega_{(\mu)}{}^\gamma_\rho a^\rho_\alpha))(x, g)\\
&=b^\beta_\gamma(g_{\mu\lambda}(x)g)\{d(a^\gamma_\alpha\cdot h_{\mu\lambda})(x, g)+\omega_{(\mu)}{}^\gamma_\rho(x)a^\rho_\alpha(g_{\mu\lambda}(x)\,g)\}\\
&=b^\beta_\rho(g)\,b^\rho_\gamma(g_{\mu\lambda}(x))\{a^\gamma_\sigma(g_{\mu\lambda}(x))da^\sigma_\alpha(g)+d(a^\gamma_\sigma\cdot g_{\mu\lambda})(x)a^\sigma_\alpha(g)\\
&\qquad\qquad+\omega_{(\mu)}{}^\gamma_\rho(x)a^\rho_\sigma(g_{\mu\lambda}(x))a^\sigma_\alpha(g)\}\\
&=b^\beta_\rho(g)\{da^\rho_\alpha(g)+a^\rho_\gamma(g_{\lambda\mu}(x))(d(a^\gamma_\alpha\cdot g_{\mu\lambda})(x)+\omega_{(\mu)}{}^\gamma_\rho(x)a^\rho_\sigma(g_{\mu\lambda}(x)))\,a^\sigma_\alpha(g)\}\\
&=b^\beta_\rho(g)\{da^\rho_\alpha(g)+\omega_{(\lambda)}{}^\rho_\sigma(x)\,a^\sigma_\alpha(g)\}
\end{aligned}$$

であるから，次の式

$$(h_{\mu\lambda})^*(b^\beta_\gamma(da^\gamma_\alpha+\omega_{(\mu)}{}^\gamma_\rho a^\rho_\alpha))=b^\beta_\gamma(da^\gamma_\alpha+\omega_{(\lambda)}{}^\gamma_\rho a^\rho_\alpha) \tag{4·54}$$

が成り立つ．よって $\tilde{\pi}^{-1}(U_\lambda \cup U_\mu)$ において

$$(\tilde{\varphi}_\mu{}^{-1})^*(b^\beta_\gamma(da^\gamma_\alpha+\omega_{(\mu)}{}^\gamma_\rho a^\rho_\alpha))=(\tilde{\varphi}_\lambda{}^{-1})^*(b^\beta_\gamma(da^\gamma_\alpha+\omega_{(\lambda)}{}^\gamma_\rho a^\rho_\alpha))=\theta^\beta_\alpha$$

である．以上の計算から $\mathfrak{F}$ 上の接続 $\{\omega_{(\lambda)}{}^\beta_\alpha\}$ は $\tilde{\mathfrak{F}}$ のバンドル空間 B，すなわち標構のつくる空間の上に m^2 個の C^{r-t-1} 級の微分形式 θ^β_α を定めることがわかった．とくに $z_\alpha=z_{(\lambda)\alpha}$ とすれば，$f(x)=\tilde{\varphi}_\lambda(x, e)$ である．一般に $\tilde{\varphi}_{\lambda,g}: U_\lambda \to B, g \in GL(m)$ を $\tilde{\varphi}_{\lambda,g}(x)=\tilde{\varphi}_\lambda(x, g)$ で定義すると (4·47)，(4·53) により

$$\omega_{(\lambda)}{}^\beta_\alpha=\tilde{\varphi}_{\lambda,e}{}^*\theta^\beta_\alpha \tag{4·55}$$

である．さて任意の $g_0 \in GL(m)$ に対して $r(g_0)\cdot\tilde{\varphi}_\lambda=\tilde{\varphi}_\lambda\cdot r(g_0)$ であるから $\tilde{\pi}^{-1}(U_\lambda)$ の上で

$$\begin{aligned}
r(g_0)^*\theta^\beta_\alpha&=r(g_0)^*(\tilde{\varphi}_\lambda{}^{-1})^*(b^\beta_\gamma(da^\gamma_\alpha+\omega_{(\lambda)}{}^\gamma_\rho a^\rho_\alpha))\\
&=(\tilde{\varphi}_\lambda{}^{-1})^*r(g_0)^*(b^\beta_\gamma(da^\gamma_\alpha+\omega_{(\lambda)}{}^\gamma_\rho a^\rho_\alpha))
\end{aligned}$$

$$=(\tilde{\varphi}_\lambda{}^{-1})^*(b^\beta_\sigma(g_0)b^\sigma_\gamma(da^\gamma_\tau a^\tau_\alpha(g_0)+\omega_{(\lambda)}{}^\gamma_\rho a^\rho_\tau a^\tau_\alpha(g_0)))$$

$$=b^\beta_\sigma(g_0)((\tilde{\varphi}_\lambda{}^{-1})^*(b^\sigma_\gamma(da^\sigma_\tau+\omega_{(\lambda)}{}^\gamma_\rho a^\rho_\tau)))a^\tau_\alpha(g_0),$$

$$r(g_0)^*\theta^\beta_\alpha=a^\beta_\sigma(g_0{}^{-1})\theta^\sigma_\tau a^\tau_\alpha(g_0),\qquad g_0\in GL(m) \tag{4·56}$$

である．さらに $\tilde{\varphi}_\lambda{}^{-1}(\tilde{\varphi}_{\lambda,x}(g))=(x,g)$ であるから　$\tilde{\varphi}_{\lambda,x}{}^*\theta^\beta_\alpha=(\tilde{\varphi}_\lambda{}^{-1}\cdot\varphi_{\lambda,x})^*$ $(b^\beta_\gamma(da^\gamma_\alpha+\omega_{(\lambda)}{}^\gamma_\rho a^\rho_\alpha))=b^\beta_\gamma da^\gamma_\alpha$,

$$\tilde{\varphi}_{\lambda,x}{}^*\theta^\beta_\alpha=b^\beta_\gamma da^\gamma_\alpha \tag{4·57}$$

なる関係式を得る．

逆に，B 上に (4·56) と (4·57) をみたす微分形式 θ^β_α が与えられているとしよう．(4·55) によって各 U_λ 上に微分形式 $\omega_{(\lambda)}{}^\beta_\alpha$ を定義すれば，$\tilde{\varphi}_{\lambda,e}(x)=\tilde{\varphi}_\mu(x,g_{\mu\lambda}(x))$ であるから，仮定と 2·2 の推論を用いてつぎの関係式

$$\omega_{(\lambda)}{}^\beta_\alpha(x)=(\tilde{\varphi}_{\lambda,e}{}^*\theta^\beta_\alpha)(x)$$

$$=((\tilde{\varphi}_{\mu,x}\cdot g_{\mu\lambda})^*\theta^\beta_\alpha)(x)+((r(g_{\mu\lambda}(x))\tilde{\varphi}_{\mu,e})^*\theta^\beta_\alpha)(x)$$

$$=(g_{\mu\lambda}{}^*\tilde{\varphi}_{\mu,x}{}^*\theta^\beta_\alpha)(x)+(\tilde{\varphi}_{\mu,e}{}^*r(g_{\mu\lambda}(x))^*\theta^\beta_\alpha)(x)$$

$$=(g_{\mu\lambda}{}^*(b^\beta_\gamma da^\gamma_\alpha))(x)+(\tilde{\varphi}_{\mu,e}{}^*(a^\beta_\gamma(g_{\lambda\mu}(x))\theta^\gamma_\tau a^\tau_\alpha(g_{\mu\lambda}(x))))(x)$$

$$=((a^\beta_\gamma\cdot g_{\lambda\mu})d(a^\gamma_\alpha\cdot g_{\mu\lambda}))(x)+(a^\beta_\gamma(g_{\lambda\mu}(x))\omega_{(\mu)}{}^\gamma_\tau a^\tau_\alpha(g_{\mu\lambda}(x)))(x)$$

$$=((a^\beta_\gamma\cdot g_{\lambda\mu})(d(a^\gamma_\alpha\cdot g_{\mu\lambda})+\omega_{(\mu)}{}^\gamma_\tau(a^\tau_\alpha\cdot g_{\mu\lambda})))(x)$$

を得る．すなわち各座標近傍 U_λ 上での微分形式の系 $\omega_{(\lambda)}{}^\beta_\alpha$ は (4·48) をみたすから，これは $\mathfrak{F}$ に一つの接続を定義する．これから B 上に定まる微分形式系ははじめに与えられた θ^β_α となることを示そう．(4·52) の右辺に従えば，点 $b=\varphi_\lambda(x,g)$ において，実際

$$(\tilde{\varphi}_\lambda{}^{-1})^*(b^\beta_\gamma(da^\gamma_\alpha+\omega_{(\lambda)}{}^\gamma_\rho a^\rho_\alpha))(b)$$

$$=(\tilde{\varphi}_\lambda{}^{-1})^*(\tilde{\varphi}_{\lambda,x}{}^*\theta^\beta_\alpha+b^\beta_\gamma(\tilde{\varphi}_{\lambda,e}{}^*\theta^\gamma_\rho)a^\rho_\alpha)(b)$$

$$=(\tilde{\varphi}_\lambda{}^{-1})^*(\tilde{\varphi}_{\lambda,x}{}^*\theta^\beta_\alpha+r(g)^*\tilde{\varphi}_{\lambda,e}{}^*\theta^\beta_\alpha)(b)$$

$$=((\tilde{\varphi}_\lambda{}^{-1})^*\tilde{\varphi}_\lambda{}^*\theta^\beta_\alpha)(b)=\theta^\beta_\alpha(b)$$

となる．以上まとめて次の定理を得る．

定理 4·4 ベクトル・バンドル $\mathfrak{F}$ において，底空間 X の座標近傍系 $\mathfrak{S}=\{U_\lambda\}$ の各々の上に (4·48) をみたす微分形式系 $\omega_{(\lambda)}{}_\alpha^\beta$ で接続が与えられれば，連合主ファイバー・バンドル $\tilde{\mathfrak{F}}$ (バンドル群を $GL(m)$ として) のバンドル空間 B 上に (4·56) と (4·57) をみたす微分形式系 θ_α^β が (4·52) によって定まる．逆にこのような θ_α^β が与えられれば，(4·55) によって各 U_λ に定まる $\omega_{(\lambda)}{}_\alpha^\beta$ は (4·48) を満足する．

$\hat{B}$ を B の部分多様体 $(\iota, \hat{B})$ と考える．$\hat{B}$ 上の微分形式系 $\iota^*\theta_\alpha^\beta=\hat{\theta}_\alpha^\beta$ は，$\hat{B}$ 上の右移動 $r(g_0)$ と B の上の右移動 $r(g_0)$ とは写像 ι に関して可換 $r(g_0)\cdot\iota=\iota\cdot r(g_0)$ であるから $r(g_0)^*\hat{\theta}_\alpha^\beta=r(g_0)^*\iota^*\theta_\alpha^\beta=\iota^*r(g_0)^*\theta_\alpha^\beta=\iota^*(a_\sigma^\beta(g_0{}^{-1})\theta_\tau^\sigma a_\alpha^\tau(g_0))$ すなわち (4·56) と同様の

$$r(g_0)^*\hat{\theta}_\alpha^\beta=a_\sigma^\beta(g_0{}^{-1})\hat{\theta}_\tau^\sigma a_\alpha^\tau(g_0), \qquad g_0\in G \tag{4·56$'$}$$

が成立する．さらに G も $GL(m)$ の部分多様体 (ι, G) として $\iota\cdot\hat{\varphi}_{\lambda,x}=\tilde{\varphi}_{\lambda,x}\cdot\iota$ ゆえ $\hat{\varphi}_{\lambda,x}{}^*\hat{\theta}_\alpha^\beta=(\iota\cdot\hat{\varphi}_{\lambda,x})^*\theta_\alpha^\beta=(\tilde{\varphi}_{\lambda,x}\cdot\iota)^*\theta_\alpha^\beta=\iota^*(b_\gamma^\beta da_\alpha^\gamma)$ を得る．よって (4·57) と同じく

$$\hat{\varphi}_{\lambda,x}{}^*\hat{\theta}_\alpha^\beta=\iota^*(b_\gamma^\beta da_\alpha^\gamma) \tag{4·57$'$}$$

が成立し，また U_λ 上で $\iota\cdot\hat{\varphi}_{\lambda,e}=\tilde{\varphi}_{\lambda,e}$ であるから

$$\omega_{(\lambda)}{}_\alpha^\beta=\hat{\varphi}_{\lambda,e}{}^*\hat{\theta}_\alpha^\beta \tag{4·55$'$}$$

を得る．$\hat{\theta}_\alpha^\beta$ について上記と同様な定理が成立することが容易にわかる．

定理 4·5 $\mathfrak{F}$ の連合主ファイバー・バンドル $\hat{\mathfrak{F}}$ のバンドル空間 $\hat{B}$ 上に (4·56)$'$, (4·57)$'$ をみたす微分形式系 $\hat{\theta}_\alpha^\beta$ が与えられれば，(4·55)$'$ によって各 U_λ 上に定まる $\omega_{(\lambda)}{}_\alpha^\beta$ は $\mathfrak{F}$ に接続を与える．

注意 多様体 X と Y の積 $X\times Y$ から X への射影を p とするとき，X 上の微分形式 ω に対して，$p^*\omega$ は $X\times Y$ の上に自然に導かれる微分形式であるが，この節ではこれをそのまま ω で表わすことにして，X の上の微分形式が $X\times Y$ の上の微分形式と考えられるという述べ方を記号の煩雑をさけるために用いた．

4·7　誘導バンドル $\tilde{\pi}^{\#}\mathfrak{F}$ における共変微分

前節で論じた $\mathfrak{F}$ における共変微分 D と接続の関係をもう少し調べてみよう．まずつぎの概念を準備する．

C^s 級のベクトル・バンドル $\mathfrak{F}_1=\{Z_1, X_1, \pi_1, Y_1\}$, $\mathfrak{F}_2=\{Z_2, X_2, \pi_2, Y_2\}$ に対して C^s 級写像 $h: Z_1\to Z_2, \bar{h}: X_1\to X_2$ が以下の条件をみたすように与えられているとする．(i) $\pi_2\cdot h=\bar{h}\cdot\pi_1$ (ii) 任意の許容写像 $\zeta_1: Y_1\to Y_{1,x_1}, \zeta_2: Y_2\to Y_{2,x_2}, x_2=\bar{h}(x_1)$ に対して $\zeta_2{}^{-1}h\zeta_1: Y_1\to Y_2$ は線型写像．しかるとき，任意の C^l 級写像 $(l\leqq s)$ $f: X_2\to X_1, \bar{h}\cdot f=1$ (恒等変換) に対して，$\Psi^l(\mathfrak{F}_1)$ から $\Psi^l(\mathfrak{F}_2)$ への線型写像 $f^{\#}$ が

$$(f^{\#}\xi_1)(x_2)=h(\xi_1(f(x_2))),\qquad \xi_1\in\Psi^l(\mathfrak{F}_1) \tag{4·58}$$

によって定まる．実際 $\pi_2((f^{\#}\xi_1)(x_2))=(\pi_2\cdot h\cdot\xi_1\cdot f)(x_2)=(\bar{h}\cdot\pi_1\cdot\xi_1\cdot f)(x_2)=(\bar{h}\cdot f)(x_2)=x_2$ であるから $f^{\#}\xi_1\in\Psi^l(\mathfrak{F}_2)$．また線型であることは $f^{\#}(a\xi_1+a'\xi_1'))(x_2)=(h\cdot(a\xi_1+a'\xi_1')\cdot f)(x_2)=a(h\cdot\xi_1\cdot f)(x_2)+a'(h\cdot\xi_1'\cdot f)(x_2)$ から明らかである．さらに，$Y_1=Y_2=Y$ で h がバンドル写像であるときには $\mathfrak{F}_1=\bar{h}^{\#}\mathfrak{F}_2$ であるが，このとき $\Psi^l(\mathfrak{F}_2)$ から $\Psi^l(\mathfrak{F}_1)$ への写像 h^0 が

$$h^0(\xi_2)(x_1)=(h|Y_{x_1})^{-1}(\xi_2(\bar{h}(x_1))) \tag{4·59}$$

によって定義される．

さて C^{r-t} 級多様体としての B から $\mathfrak{F}$ の底空間 X への C^{r-t} 級写像 $\tilde{\pi}$ による誘導バンドル $\tilde{\pi}^{\#}\mathfrak{F}=\{\Sigma, B, q, Y, G\}$ を考えよう．これの誘導写像を $h: \Sigma\to Z$ とする．B の任意の点 b は $b=(x, z_\alpha(b)), x=\tilde{\pi}(b)$ であるから，$\tilde{\pi}^{\#}\mathfrak{F}$ の C^{r-t} 級切断 $\mathfrak{z}_\alpha$ を

$$h(\mathfrak{z}_\alpha(b))=z_\alpha(b),\qquad \alpha=1,\cdots,m \tag{4·60}$$

で定義する．$\mathfrak{z}_1(b),\cdots,\mathfrak{z}_m(b)$ は $Y_b=q^{-1}(b)$ の基をなすから，$\tilde{\pi}^{\#}\mathfrak{F}$ における共変微分 $\tilde{D}$ を

$$\tilde{D}\mathfrak{z}_\alpha=\mathfrak{z}_\beta\otimes\theta_\alpha^\beta \tag{4·61}$$

によって定義する．任意の $\eta\in\Psi^l(\tilde{\pi}^{\#}\mathfrak{F})$ は $\eta(b)=\mathfrak{z}_\alpha(b)\eta^\alpha(b), b\in B$ と表わされるから，その共変微分は

$$\tilde{D}\eta=\mathfrak{z}_\alpha\otimes(d\eta^\alpha+\theta_\alpha^\beta\eta^\beta) \tag{4・62}$$

である．

さて $\mathfrak{F}$ の任意の C^l 級切断 $f: X\to B$ に対して，(4・53) は以上の概念を用いて表わせばつぎのようになる

$$D(h\cdot\mathfrak{z}_\alpha\cdot f)=h\cdot\mathfrak{z}_\beta\cdot f\otimes f^*\theta_\alpha^\beta \tag{4・53$'$}$$

任意の $\eta\in\Psi^l(\tilde{\pi}^{\#}\mathfrak{F})$ に対して $\xi=f^{\#}\eta=h\cdot\eta\cdot f\in\Psi^l(\mathfrak{F})$ を対応させると $\xi=(h\cdot\mathfrak{z}_\alpha\cdot f)(\eta^\alpha\cdot f)$ であるから，上の関係式を用いて

$$\begin{aligned}D\xi&=h\cdot\mathfrak{z}_\beta\cdot f\otimes\{d(\eta^\beta\cdot f)+(f^*\theta_\alpha^\beta)(\eta^\alpha\cdot f)\}\\&=f^{\#}\mathfrak{z}_\beta\otimes f^*(d\eta^\beta+\theta_\alpha^\beta\eta^\alpha)=(f^{\#}\otimes f^*)(\mathfrak{z}_\beta\otimes(d\eta^\beta+\theta_\alpha^\beta\eta^\alpha))\\&=(f^{\#}\otimes f^*)\tilde{D}\eta\end{aligned}$$

が出る．よって D と $\tilde{D}$ との関係を与えるつぎの公式

$$D\xi=(f^{\#}\otimes f^*)\tilde{D}\eta,\quad \xi=f^{\#}\eta,\ \eta\in\Psi^l(\tilde{\pi}^{\#}\mathfrak{F}),\quad f\in\Psi^l(\tilde{\mathfrak{F}}) \tag{4・63}$$

が得られた．

逆に任意の $\xi\in\Psi^l(\mathfrak{F})$ に対して $\eta\in\Psi^l(\tilde{\pi}^{\#}\mathfrak{F})$ を $h\cdot\eta=\xi\cdot\tilde{\pi}$ なるように一意に定めることができる．実際 $\eta(b)=\mathfrak{z}_\alpha(b)\eta^\alpha(b)$, $x=\tilde{\pi}(b)$ とおけば，$\xi(x)=(h\cdot\eta)(b)=h(\mathfrak{z}_\alpha(b))\eta^\alpha(b)=z_\alpha(b)\eta^\alpha(b)$ であって，b が $\mathfrak{F}$ の標構であることから $\eta^\alpha(b)$ が一意に定まる．$\tilde{\mathfrak{F}}$ の任意の C^l 級切断 f を用いると $h\cdot\eta\cdot f=\xi\cdot\tilde{\pi}\cdot f=\xi$ であるから (4・63) によって

$$D\xi=(f^{\#}\otimes f^*)\tilde{D}\eta$$

これに $\tilde{\pi}^0\otimes\tilde{\pi}^*$ をほどこすと

$$\begin{aligned}(\tilde{\pi}^0\otimes\tilde{\pi}^*)D\xi&=(\tilde{\pi}^0\cdot f^{\#}\otimes\tilde{\pi}^*\cdot f^*)\tilde{D}\eta\\&=\tilde{\pi}^0\cdot f^{\#}\cdot\mathfrak{z}_\beta\otimes(f\cdot\tilde{\pi})^*(d\eta^\beta+\theta_\alpha^\beta\eta^\alpha)\end{aligned}$$

ところでこの関係式の左辺は f に関係しないし，D も $\tilde{D}$ も局所的に定義されるものであるから，f を点 $b\in B$ に対して $f(x)=b$ であるようにとることができる．よって $(\tilde{\pi}^0\cdot f^{\#}\cdot\mathfrak{z}_\beta)(b)=\mathfrak{z}_\beta(b)$ となることは明らかである．このとき $((f\cdot\tilde{\pi})^*(d\eta^\beta+\theta_\alpha^\beta\eta^\alpha))(b)$ はこのような f の選び方に関係しない．点 b にお

ける任意の接ベクトル $\mathfrak{v}$ に対して

$$\langle \mathfrak{v}, (((f\cdot\widetilde{\pi})^*(d\eta^\beta+\theta_\alpha^\beta\eta^\alpha))(b)\rangle$$
$$=\langle f_*(\widetilde{\pi}_*\mathfrak{v}), (d\eta^\beta+\theta_\alpha^\beta\eta^\alpha)(b)\rangle$$

であるから，$\widetilde{\pi}_*\mathfrak{v}\neq 0$ ならば $f_*(\widetilde{\pi}_*\mathfrak{v})=\mathfrak{v}$ となるような f を選ぶことができる．よって $(f\cdot\widetilde{\pi})^*(d\eta^\beta+\theta_\alpha^\beta\eta^\alpha)$ はこの点 b において $\widetilde{\pi}_*\mathfrak{v}\neq 0$ である接ベクトル $\mathfrak{v}$ に対して $d\eta^\beta+\theta_\alpha^\beta\eta^\alpha$ と同じ内積をもち，$\widetilde{\pi}_*\mathfrak{v}=0$ である接ベクトルに対して内積が0である．いいかえれば $(f\cdot\widetilde{\pi})^*(d\eta^\beta+\theta_\alpha^\beta\eta^\alpha)$ はファイバーに接するベクトルとの内積が0である．ところで $x\in U_\lambda$ とすれば $\widetilde{\varphi}_{\lambda,x}{}^*(d\eta^\beta+\theta_\alpha^\beta\eta^\alpha)=d(\eta^\beta\cdot\widetilde{\varphi}_{\lambda,x})+(b_\gamma^\beta da_\alpha^\gamma)(\eta^\alpha\cdot\widetilde{\varphi}_{\lambda,x})=b_\gamma^\beta d(a_\alpha^\gamma(\eta^\alpha\cdot\widetilde{\varphi}_{\lambda,x}))$ であって，$\xi(x)=z_{(\lambda)\alpha}(x)\xi^\alpha(x)$ とおけば $\xi^\alpha(x)=a_\beta^\alpha(\eta^\beta\cdot\widetilde{\varphi}_{\lambda,x})$ であるから，$d\eta^\beta+\theta_\alpha^\beta\eta^\alpha$ もまたファイバーに接するベクトルとの内積が0である．よって

$$((f\cdot\widetilde{\pi})^*(d\eta^\beta+\theta_\alpha^\beta\eta^\alpha))(b)=(d\eta^\beta+\theta_\alpha^\beta\eta^\alpha)(b), \qquad b=f(\widetilde{\pi}(b))$$

となる．b は任意であったから，つぎの公式が得られた

$$\widetilde{D}\eta=(\widetilde{\pi}^0\otimes\widetilde{\pi}^*)D\xi, \qquad \eta=\widetilde{\pi}^0\xi, \qquad \xi\in\Psi^l(\mathfrak{F}) \tag{4·64}$$

問 公式 (4·64) を成分を用いて直接証明せよ．

4·8 テンソル場の共変微分

2·4 で論じたと同様な方法によって，$\mathfrak{F}$ に対して，Y の上のテンソル空間をファイバーとするファイバー・バンドルをそれぞれに応じてつくることができる．Y の双対空間 Y^* をファイバーとするのを $\mathfrak{F}^*$ で表わす．これは座標変換を $h_{\mu\lambda}: U_\lambda\cap U_\mu\to G^*\subset L(Y^*)\approx GL(m)$, $h_{\mu\lambda}(x)=(g_{\mu\lambda}(x)^{-1})^*$ としてつくられるが，その座標函数は $\psi_{\lambda,x}=(\varphi_{\lambda,x}{}^{-1})^*: Y^*\to Y_x{}^*$ と考えてよろしい．Y の基 $\{y_\alpha\}$ の双対基を $\{y^\alpha\}$ とすれば，$\psi_{\lambda,x}$ の定義から $\psi_{\lambda,x}(y^\alpha)=z_{(\lambda)}^{\alpha}(x)$ は Y_x の基 $\{z_{(\lambda)\alpha}(x)\}$ の双対基をなす．$\mathfrak{F}^*$ における共変微分を $\mathfrak{F}$ のそれから

$\Psi^l(\mathfrak{F})\ni\xi, \Psi^l(\mathfrak{F}^*)\ni\eta$ に対して，つぎの条件

$$d\langle\xi,\eta\rangle=\langle D\xi,\eta\rangle+\langle\xi,D\eta\rangle \tag{4·65}$$

をみたすように定義する．U_λ の上で $\delta_\alpha^\beta=\langle z_{(\lambda)\alpha}, z_{(\lambda)}^{\beta}\rangle$ であるから

$$0=\langle z_{(\lambda)\gamma}\otimes\omega_{(\lambda)}{}^{\gamma}_{\alpha},\ z_{(\lambda)}^{\beta}\rangle+\langle z_{(\lambda)\alpha},\ Dz_{(\lambda)}^{\beta}\rangle$$
$$=\omega_{(\lambda)}{}^{\beta}_{\alpha}+\langle z_{(\lambda)\alpha},\ Dz_{(\lambda)}^{\beta}\rangle$$

よって

$$Dz_{(\lambda)}^{\beta}=-z_{(\lambda)}^{\alpha}\otimes\omega_{(\lambda)}{}^{\beta}_{\alpha} \tag{4·47)'}$$

である．これから一般の場合にも共変微分を定義できる．例えば

$$D:\Psi^{l}(\mathfrak{F}\otimes\mathfrak{F})\to\Psi^{l-1}(\mathfrak{F}\otimes\mathfrak{F}\otimes T^{*}(X))$$

は，任意の $\xi\in\Psi^{l}(\mathfrak{F}\otimes\mathfrak{F})$ が U_λ の上では

$$\xi=z_{(\lambda)\alpha}\otimes z_{(\lambda)\beta}X^{\alpha\beta}$$

と表わされるので

$$D\xi=z_{(\lambda)\alpha}\otimes z_{(\lambda)\beta}\otimes DX^{\alpha\beta}$$
$$DX^{\alpha\beta}=dX^{\alpha\beta}+\omega^{\alpha}_{\gamma}X^{\gamma\beta}+\omega^{\beta}_{\gamma}X^{\alpha\gamma}$$

として定義することができる．

さらに $\mathfrak{F}_1$ を $\mathfrak{F}$ の上のテンソル・バンドルとして $\mathfrak{F}_1\otimes\Lambda^{*s}(X)$ を考え，その共変微分

$$\nabla:\Psi^{l}(\mathfrak{F}_1\otimes\Lambda^{*s}(X))\to\Psi^{l-1}(\mathfrak{F}_1\otimes\Lambda^{*s+1}(X))$$

を，任意の $\xi_1\in\Psi^{l}(\mathfrak{F}_1)$ と X の C^l 級で s 次の微分形式 ω_s に対して

$$\nabla(\xi_1\otimes\omega_s)=D\xi_1\wedge\omega_s+\xi_1\otimes d\omega_s \tag{4·66}$$

なるように定義する．これも実数体上のベクトル空間の線型写像である．ここで右辺の第1項の $\wedge$ は，$\omega_1\in\Psi^{l}(T^{*}(X))$ について

$$(\xi_1\otimes\omega_1)\wedge\omega_s=\xi_1\otimes(\omega_1\wedge\omega_s)$$

の意味の積を表わすものとする．$s=0$ のとき ∇ は D と一致し，$\mathfrak{F}_1$ が X の上のスカラーのつくるバンドルのときには外微分となる．

以上述べたことは誘導バンドル $\pi^{\#}\mathfrak{F}$ に対してもいえて，それぞれ $\tilde{D},\tilde{\nabla}$ が定まり，D と $\tilde{D}$, ∇ と $\tilde{\nabla}$ に対しては (4·63), (4·64) と同様の関係式が成り立つことが証明できる．

4·9 曲 率 形 式

前節に述べた共変微分を用いて $2\leqq l\leqq r-t$ の場合には

$$\tilde{\nabla}\mathfrak{z}_\alpha=\tilde{D}\mathfrak{z}_\alpha=\mathfrak{z}_\beta\otimes\theta_\alpha^\beta$$

からさらに

$$\tilde{\nabla}^2\mathfrak{z}_\alpha=\tilde{D}\mathfrak{z}_\beta\wedge\theta_\alpha^\beta+\mathfrak{z}_\beta\otimes d\theta_\alpha^\beta=\mathfrak{z}_\beta\otimes(d\theta_\alpha^\beta+\theta_\gamma^\beta\wedge\theta_\alpha^\gamma)$$

を得る．B 上の2次の微分形式

$$\Theta_\alpha^\beta=d\theta_\alpha^\beta+\theta_\gamma^\beta\wedge\theta_\alpha^\gamma \tag{4·67}$$

を導入すると，上の関係式は

$$\tilde{\nabla}^2\mathfrak{z}_\alpha=\mathfrak{z}_\beta\otimes\Theta_\alpha^\beta \tag{4·68}$$

と表わされる．この Θ_α^β を $\mathfrak{F}$ に与えられた接続の（連合主ファイバー・バンドルに関する）**曲率形式**という．任意の $\eta\in\Psi^l(\tilde{\pi}^\#\mathfrak{F})$ は $\eta=\mathfrak{z}_\alpha\eta^\alpha$ と表わされるから $\tilde{\nabla}\eta=(\tilde{D}\mathfrak{z}_\alpha)\eta^\alpha+\mathfrak{z}_\alpha\otimes d\eta^\alpha$, $\tilde{\nabla}^2\eta=(\tilde{\nabla}^2\mathfrak{z}_\alpha)\eta^\alpha-\tilde{D}\mathfrak{z}_\alpha\wedge d\eta^\alpha+\tilde{D}\mathfrak{z}_\alpha\wedge d\eta^\alpha+\mathfrak{z}_\alpha d^2\eta^\alpha=(\tilde{\nabla}^2\mathfrak{z}_\alpha)\eta^\alpha=\mathfrak{z}_\beta\otimes\Theta_\alpha^\beta\eta^\alpha$, すなわち

$$\tilde{\nabla}^2\eta=\mathfrak{z}_\beta\otimes\Theta_\alpha^\beta\eta^\alpha,\qquad \eta=\mathfrak{z}_\alpha\eta^\alpha \tag{4·69}$$

X の上で同様のことを考えてみよう．$\tilde{\mathfrak{F}}$ の C^l 級切断 $f:X\to B$ を用いて $\xi\in\Psi^l(\mathfrak{F})$ を $\xi=h\cdot\eta\cdot f$ とおく．(3·7) と (4·66) を用いると (4·53)′ から

$$\nabla^2(h\cdot\mathfrak{z}_\alpha\cdot f)=h\cdot\mathfrak{z}_\beta\cdot f\otimes f^*\Theta_\alpha^\beta=(f^\#\otimes f^*)\tilde{\nabla}^2\mathfrak{z}_\alpha \tag{4·70}$$

が出てくる．とくに U_λ 上で $f=\tilde{\varphi}_{\lambda,e}$ を用いれば，(4·55) によって

$$\begin{cases}\nabla^2 z_{(\lambda)\alpha}=z_{(\lambda)\beta}\otimes\Omega_{(\lambda)\alpha}^{\ \ \beta}\\ \Omega_{(\lambda)\alpha}^{\ \ \beta}=\tilde{\varphi}_{\lambda,e}^*\Theta_\alpha^\beta=d\omega_{(\lambda)\alpha}^{\ \ \beta}+\omega_{(\lambda)\gamma}^{\ \ \beta}\wedge\omega_{(\lambda)\alpha}^{\ \ \gamma}\end{cases} \tag{4·71}$$

この $\Omega_{(\lambda)\alpha}^{\ \ \beta}$ を座標近傍 U_λ における与えられた接続の**曲率形式**とよぶ．これは U_λ での座標 $\overset{1}{u}_\lambda,\cdots,\overset{n}{u}_\lambda$ の微分 $d\overset{1}{u}_\lambda,\cdots,d\overset{n}{u}_\lambda$ の2次の微分形式である．さて $\xi=(h\cdot\mathfrak{z}_\alpha\cdot f)\eta^\alpha\cdot f$ であるから

$$\nabla\xi=\nabla(h\cdot\mathfrak{z}_\alpha\cdot f)\eta^\alpha\cdot f+(h\cdot\mathfrak{z}_\alpha\cdot f)\otimes d(\eta^\alpha\cdot f)$$

$$\begin{aligned}\nabla^2\xi&=\nabla^2(h\cdot\mathfrak{z}_\alpha\cdot f)\eta^\alpha f-\nabla(h\cdot\mathfrak{z}_\alpha\cdot f)\wedge d(\eta^\alpha\cdot f)+\nabla(h\cdot\mathfrak{z}_\alpha\cdot f)\wedge d(\eta^\alpha\cdot f)\\&\quad+(h\cdot\mathfrak{z}_\alpha\cdot f)\otimes d^2(\eta^\alpha\cdot f)=\nabla^2(h\cdot\mathfrak{z}_\alpha\cdot f)\eta^\alpha\cdot f\\&=(h\cdot\mathfrak{z}_\beta\cdot f)\otimes(f^*\Theta_\alpha^\beta)(\eta^\alpha\cdot f)=(f^\#\otimes f^*)\tilde{\nabla}\eta\end{aligned}$$

よって次の結果を得る．

$$\nabla^2\xi=(f^{\#}\otimes f^*)\widetilde{\nabla}^2\eta, \qquad \xi=f^{\#}\eta=h\cdot\eta\cdot f \tag{4·72}$$

曲率形式の性質を調べてみよう．(4·57) から

$$\varphi_{\lambda,x}{}^*\Theta_\alpha^\beta=d(b_\gamma^\beta da_\alpha^\gamma)+b_\rho^\beta da_\gamma^\rho\wedge b_\sigma^\gamma da_\alpha^\sigma$$
$$=db_\gamma^\beta\wedge da_\alpha^\gamma+b_\rho^\beta b_\sigma^\gamma da_\gamma^\rho\wedge da_\alpha^\sigma$$

他方 $b_\gamma^\beta a_\alpha^\gamma=\delta_\alpha^\beta$ から

$$db_\gamma^\beta+b_\rho^\beta b_\gamma^\sigma da_\sigma^\rho=0$$

が出るから，上の式に代入すると

$$\varphi_{\lambda,x}{}^*\Theta_\alpha^\beta=0 \tag{4·73}$$

が出る．さらに (4·56) から類似の関係式

$$r(g)^*\Theta_\alpha^\beta=r(g)^*(d\theta_\alpha^\beta+\theta_\gamma^\beta\wedge\theta_\alpha^\gamma)$$
$$=b_\sigma^\beta(g)d\theta_\tau^\sigma a_\alpha^\tau(g)+b_\sigma^\beta(g)\theta_\tau^\sigma a_\gamma^\tau(g)\wedge b_\rho^\gamma(g)\theta_\varepsilon^\rho a_\alpha^\varepsilon(g)$$
$$=b_\sigma^\beta(g)(d\theta_\tau^\sigma+\theta_\rho^\sigma\wedge\theta_\tau^\rho)a_\alpha^\tau(g)$$

$$r(g)^*\Theta_\beta^\alpha=b_\sigma^\beta(g)\Theta_\tau^\sigma a_\alpha^\tau(g) \tag{4·74}$$

を得る．上に導いた関係式 (4·73) と (4·74) は B の局所座標について Θ_α^β がどんな形をしているかを示している．実際 $\tilde{\pi}^{-1}(U_\lambda)$ の上では (4·52) から

$$\tilde{\varphi}_\lambda{}^*\theta_\alpha^\beta=b_\gamma^\beta(da_\alpha^\gamma+\omega_{(\lambda)}{}_\rho^\gamma a_\alpha^\rho),$$
$$\tilde{\varphi}_\lambda{}^*\Theta_\alpha^\beta=d(b_\gamma^\beta da_\alpha^\gamma)+db_\gamma^\beta\wedge\omega_{(\lambda)}{}_\rho^\gamma a_\alpha^\rho+b_\gamma^\beta d\omega_{(\lambda)}{}_\rho^\gamma a_\alpha^\rho-b_\gamma^\beta\omega_{(\lambda)}{}_\rho^\gamma\wedge da_\alpha^\rho$$
$$+b_\gamma^\beta(da_\sigma^\gamma+\omega_{(\lambda)}{}_\rho^\gamma a_\sigma^\rho)\wedge b_\tau^\sigma(da_\alpha^\tau+\omega_{(\lambda)}{}_\varepsilon^\tau a_\alpha^\varepsilon)$$
$$=b_\gamma^\beta(d\omega_{(\lambda)}{}_\sigma^\gamma+\omega_{(\lambda)}{}_\rho^\gamma\wedge\omega_{(\lambda)}{}_\sigma^\rho)a_\alpha^\sigma=b_\gamma^\beta\Omega_{(\lambda)}{}_\sigma^\gamma a_\alpha^\sigma,$$

すなわち $U_\lambda\times GL(m)$ の上で

$$\tilde{\varphi}_\lambda{}^*\Theta_\alpha^\beta=b_\gamma^\beta\Omega_{(\lambda)}{}_\sigma^\gamma a_\alpha^\sigma \tag{4·75}$$

が成り立つ．したがって局所座標を用いると Θ_α^β は $du_\lambda^1,\cdots,du_\lambda^n$ の二次の微分形式であって，その係数が $\tilde{\pi}^{-1}(U_\lambda)$ の上のスカラーである．よって Θ_α^β は

$$\Theta_\alpha^\beta=\frac{1}{2}P_{\alpha ij}^\beta du_\lambda^i\wedge du_\lambda^j, \qquad P_{\alpha ij}^\beta=-P_{\alpha ji}^\beta \tag{4·76}$$

なる形に表わすことができる.

さて $U_\lambda \cap U_\mu \neq \phi$ において $\tilde{\varphi}_\lambda(x, e)=\tilde{\varphi}_\mu(x, g_{\mu\lambda}(x))$ であるから (2·15)′ と (4·75) によって

$$\Omega_{(\lambda)\alpha}^{\ \ \beta}=\tilde{\varphi}_{\lambda, e}{}^*\Theta_\alpha^\beta=(b_\gamma^\beta\cdot g_{\mu\lambda})\,\Omega_{(\mu)\rho}^{\ \ \gamma}(a_\alpha^\rho\cdot g_{\mu\lambda}) \tag{4·77}$$

であるから, (4·42) を用いると

$$\Omega=z_{(\lambda)\beta}\otimes z_{(\lambda)}^{\ \alpha}\otimes\Omega_{(\lambda)\alpha}^{\ \ \beta}=z_{(\lambda)\beta}(b_\gamma^\beta\cdot g_{\mu\lambda})\otimes z_{(\lambda)}^{\ \alpha}(a_\alpha^\rho\cdot g_{\mu\lambda})\otimes\Omega_{(\mu)\rho}^{\ \ \gamma}$$

$$=z_{(\mu)\gamma}\otimes z_{(\mu)}^{\ \rho}\otimes\Omega_{(\mu)\rho}^{\ \ \gamma}$$

すなわち各 U_λ 上での $z_{(\lambda)\beta}\otimes z_{(\lambda)}^{\ \alpha}\otimes\Omega_{(\lambda)\alpha}^{\ \ \beta}$ は X に対して $\mathfrak{F}\otimes\mathfrak{F}^*\otimes\Lambda^{*2}(X)$ の切断を定める. したがって各 $\Omega_{(\lambda)\alpha}^{\ \ \beta}$ はこの一般的テンソル場を表わすと考え得る. これをこの接続の**曲率テンソル**とよぶ. $z_{(\lambda)\alpha}, z_{(\lambda)}^{\ \alpha}, du_\lambda^i$ に関する成分が $P_{\alpha ij}^\beta$ となるわけで, α と β は $\mathfrak{F}$ に関する添字, i と j は $T(X)$ に関する添字である.

曲率テンソルに関する性質として最後に以下のことを調べよう. (4·75) から X の上で $\Omega_{(\lambda)\alpha}^{\ \ \beta}=0$ が各 U_λ で成り立つことと, B の上で $\Theta_\alpha^\beta=0$ であることと同じである. ところで Pfaff 方程式系の積分可能条件に関する Frobenius の定理によって

$$\Theta_\alpha^\beta=0$$

ならば, 方程式系

$$\theta_\alpha^\beta=0$$

は完全積分可能である. $\tilde{\pi}^{-1}(U_\lambda)$ で $\tilde{\varphi}_\lambda{}^*\theta_\alpha^\beta=b_\gamma^\beta(da_\alpha^\gamma+\omega_{(\lambda)\sigma}^{\ \ \gamma}a_\alpha^\sigma)$ であるから, U_λ の任意の点の適当な近傍から $GL(m)$ への C^{r-t} 級写像 ρ で

$$d(a_\alpha^\gamma\cdot\rho)+\omega_{(\lambda)\sigma}^{\ \ \gamma}(a_\alpha^\sigma\cdot\rho)=0$$

となるものが存在する. ρ の定義域は U_λ であるとして一般性を失わない. $\tilde{\mathfrak{F}}$ の局所切断 $f: U_\lambda\to B$ を $f(x)=\tilde{\varphi}_\lambda(x, \rho(x))$ によって定義し, $f^*\theta_\alpha^\beta$ を計算しよう. $\sigma: U_\lambda\to U_\lambda\times GL(m)$ を $\sigma(x)=(x, \rho(x))$ とおけば $f=\tilde{\varphi}_\lambda\cdot\sigma$ であるから

$$f^*\theta_\alpha^\beta=\sigma^*\tilde{\varphi}_\lambda{}^*\theta_\alpha^\beta=\sigma^*(b_\gamma^\beta(da_\alpha^\gamma+\omega_{(\lambda)}{}_\sigma^\gamma a_\alpha^\sigma))$$
$$=b_\gamma^\beta\cdot\rho(d(a_\alpha^\gamma\cdot\rho)+\omega_{(\lambda)}{}_\sigma^\gamma(a_\alpha^\sigma\cdot\rho))=0.$$

以上は $\hat{B}$ 上の微分形式 $\iota^*\theta_\alpha^\beta=\hat{\theta}_\alpha^\beta$ に対しても同様に成り立つから次の定理を得る.

定理 4·6 曲率形式 $\Omega_{(\lambda)\alpha}^\beta=0$ であるような接続をもつ $\mathfrak{F}$ は，その座標近傍を適当にこまかくし座標函数 φ_λ を適当に選びかえれば，接続の係数がすべて 0 となるようにできる.

このような接続は**局所平坦な接続**という.

最後に (4·67) を外微分すれば，B 上での等式

$$d\Theta_\alpha^\beta=d\theta_\gamma^\beta\wedge\theta_\alpha^\gamma-\theta_\gamma^\beta\wedge d\theta_\alpha^\gamma$$
$$=(\Theta_\gamma^\beta-\theta_\rho^\beta\wedge\theta_\gamma^\rho)\wedge\theta_\alpha^\gamma-\theta_\gamma^\beta\wedge(\Theta_\alpha^\gamma-\theta_\rho^\gamma\wedge\theta_\alpha^\rho)$$
$$=\Theta_\gamma^\beta\wedge\theta_\alpha^\gamma-\theta_\gamma^\beta\wedge\Theta_\alpha^\gamma$$

よって

$$\tilde{\nabla}\Theta_\alpha^\beta\equiv d\Theta_\alpha^\beta-\Theta_\gamma^\beta\wedge\theta_\alpha^\gamma+\theta_\gamma^\beta\wedge\Theta_\alpha^\gamma=0 \qquad (4·78)$$

を得る. 同様に

$$\nabla\Omega_{(\lambda)}{}_\alpha^\beta\equiv d\Omega_{(\lambda)}{}_\alpha^\beta-\Omega_{(\lambda)}{}_\gamma^\beta\wedge\omega_{(\lambda)}{}_\alpha^\gamma+\omega_{(\lambda)}{}_\gamma^\beta\wedge\Omega_{(\lambda)}{}_\alpha^\gamma=0 \qquad (4·78)'$$

を得る. これらをこの接続に関する **Bianchi の恒等式**という.

問 $\nabla\Omega\equiv z_{(\lambda)\beta}\otimes z_{(\lambda)}^\alpha\otimes\nabla\Omega_{(\lambda)}{}_\alpha^\beta=0$ をためせ.

4·10 曲線に沿っての展開

C^r 級多様体 X_1 から X への C^r 級写像 $f: X_1\to X$ が与えられているとき，誘導バンドル $\mathfrak{F}_1=f^\#\mathfrak{F}=\{Z_1, X_1, \pi_1, Y, G, f^{-1}(U_\lambda), \varphi_{1\lambda}\}$, $\tilde{\mathfrak{F}}_1=f^\#\tilde{\mathfrak{F}}=\{B_1, X_1, \tilde{\pi}_1, GL(m), f^{-1}(U_\lambda), \tilde{\varphi}_{1\lambda}\}$ の誘導写像を $h_1, \tilde{h}_1$ とする. 2·5 によって

$$\pi\cdot h_1=f\cdot\pi_1, \qquad \varphi_{\lambda, f(x_1)}=h_1\cdot\varphi_{1\lambda, x_1}$$
$$\tilde{\varphi}_{\lambda, f(x_1)}=\tilde{h}_1\cdot\tilde{\varphi}_{1\lambda, x_1} \qquad f(x_1)\in U_\lambda,$$
$$r(g)\cdot\tilde{h}_1=\tilde{h}_1\cdot r(g), \qquad g\in GL(m)$$

が成立するから，各 $f^{-1}(U_\lambda)$ 上の微分形式系 $f^*\omega_{(\lambda)}{}_\alpha^\beta$ は (4·48) と同じ条

件をみたす．よってこれらは $f^{\#}\mathfrak{F}$ に $\mathfrak{F}$ と同じ種類の接続を定義する．上記の関係から B_1 上の微分形式系 $\tilde{h}^*\theta_\alpha^\beta$ が，この接続に対応する微分形式系で(4·55)～(4·57) と同様の関係をみたす．$f^{\#}\mathfrak{F}$ におけるこの接続を f から**誘導された接続**とよぶ．$v: X_1 \to Z, \pi\cdot v=f$ である C^l 級写像の全体は実数体上のベクトル空間をなす．これを $\Psi^l(X_1, f, \mathfrak{F})$ で表わすことにする．$\Psi^l(f^{\#}\mathfrak{F}) \ni \xi$ で $h_1\cdot\xi=v$ となる ξ が各 v に対して一意に定まる．この対応によって

$$\Psi^l(f^{\#}\mathfrak{F}) \approx \Psi^l(X_1, f, \mathfrak{F})$$

である．ξ が $f^{\#}\mathfrak{F}$ における誘導接続によって平行，すなわち $D\xi=0$ のとき v は (f, X_1) **に沿って平行**であるという．同様に $v: X_1 \to Z^*$ に対しても，これに対応する $\Psi^l(f^{\#}\mathfrak{F}^*) \ni \xi$ が $D\xi=0$ のとき，(f, X_1) に沿って平行であるという．

とくに X_1 が開区間 $-\infty \leqq a < t < b \leqq +\infty$ であれば

$$f^*\omega_{(\lambda)\alpha}^{\ \ \ \beta}=P_{(\lambda)\alpha}^{\ \ \ \beta}dt \tag{4·79}$$

と表わされる．したがって $v \in \Psi^l(X_1, f, \mathfrak{F})$ を U_λ で

$$v=(z_{(\lambda)\alpha}\cdot f)v_{(\lambda)}^\alpha$$

と表わせば，v が曲線 (f, X_1) に沿って平行であるとすると

$$\frac{dv_{(\lambda)}^\alpha}{dt}+P_{(\lambda)\beta}^{\ \ \ \alpha}v_{(\lambda)}^\beta=0 \tag{4·80}$$

同様に $v \in \Psi^l(X_1, f, \mathfrak{F}^*)$ を U_λ で

$$v=v_{(\lambda)\alpha}(z_{(\lambda)}^\alpha\cdot f)$$

と表わせば，v が曲線 (f, X_1) に沿って平行であるとすると

$$\frac{dv_{(\lambda)\alpha}}{dt}-v_{(\lambda)\beta}P_{(\lambda)\alpha}^{\ \ \ \beta}=0 \tag{4·80$'$}$$

である．ところで (4·80), (4·80)′ のような常微分方程式系は $r-t \geqq 2$ ならば，一点 t_0 での値の組を与えれば，この t_0 を含む連結な部分できまる．したがって $\Psi^l(X_1, f, \mathfrak{F}), \Psi^l(X_1, f, \mathfrak{F}^*)$ の (f, X_1) に沿って平行な元の全体は m 次元のベクトル部分空間をなす．これらの事情を少し詳しく述べよう．

X の2点 x_0, x_1 を結ぶ C^1 級曲線 C，すなわち閉区間 $[0,1]$ を含む開区間 $I\supset[0,1]$ から X への C^1 級写像 $f: I\to X$, $f(0)=x_0$, $f(1)=x_1$ が与えられているとする．$f(I)\subset U_\lambda$ なる座標近傍があるとして，常微分方程式系

$$\frac{dY^\beta_\alpha}{dt}=Y^\beta_\gamma P^\gamma_\alpha, \qquad P^\gamma_\alpha=P_{(\lambda)}{}^\gamma_\alpha \tag{4·81}$$

を考え，これの特殊解 $Y^\beta_\alpha=Y^\beta_\alpha(t)$, $Y^\beta_\alpha(0)=\delta^\beta_\alpha$ をとる．一般解は定数 C^β_α を任意にとって $Y^\beta_\alpha=C^\beta_\gamma Y^\gamma_\alpha(t)$ で与えられる．行列 $(Y^\beta_\alpha(t))$ の余因子のつくる行列を $(Z^\beta_\alpha(t))$ とすれば $\Delta(t)=|Y^\beta_\alpha(t)|$ に対して

$$\frac{d}{dt}\Delta=Z^\alpha_\beta\frac{dY^\beta_\alpha}{dt}=Z^\alpha_\beta Y^\beta_\gamma P^\gamma_\alpha=\Delta P^\alpha_\alpha \tag{4·82}$$

であるから，行列 $(Y^\beta_\alpha(t))$ は正則である．よってこれは $GL(m)$ の元を表わす．ところが

$$\left(\frac{1}{\Delta}Z^\beta_\gamma\frac{d}{dt}\,Y^\gamma_\alpha\right)(t)=P^\beta_\alpha(t)\in L(G)$$

でしかも $Y^\beta_\alpha(0)=\delta^\beta_\alpha$ であるから 3·3 節の理論によれば $(Y^\beta_\alpha(t))$ は G の曲線である．そこで写像 $\sigma: I\to G$ を $\sigma(t)=(Y^\beta_\alpha(t))^{-1}$ で定義する．写像 ρ: $I\times G\to B$ を

$$\rho(t,g)=\tilde{\varphi}_\lambda(f(t),\sigma(t)g) \tag{4·83}$$

で定義し，さらに $\rho_g: I\to B$ を $\rho_g(t)=\rho(t,g)$ とおけば $\tilde{\pi}\cdot\rho_g=f$ であるから $\rho_g(I)$ は C 上にある B の曲線である．g を種々にとると ρ_g は B 上の右移動によって互にうつりあう曲線族を与える．

$f(I)\subset U_\mu$ のような他の座標近傍があるとする．

$$f^*\omega_{(\mu)}{}^\beta_\alpha=\bar{P}^\beta_\alpha dt$$

とおいて，微分方程式系

$$\frac{d}{dt}\bar{Y}^\beta_\alpha=\bar{Y}^\beta_\gamma\bar{P}^\gamma_\alpha dt$$

の特殊解 $\bar{Y}^\beta_\alpha(t)$, $\bar{Y}^\beta_\alpha(0)=\delta^\beta_\alpha$ を用いて $\bar{\sigma}(t)=(\bar{Y}^\beta_\alpha(t))^{-1}$ を同様に定義する．ところが (4·48) により

$$\overline{P}_\alpha^\beta=(b_\gamma^\beta\cdot g_{\lambda\mu}\cdot f)(d(a_\alpha^\gamma\cdot g_{\lambda\mu}\cdot f)+P_\sigma^\gamma(a_\alpha^\sigma\cdot g_{\lambda\mu}\cdot f))$$

であるから

$$\frac{d}{dt}(Y_\gamma^\beta(a_\alpha^\gamma\cdot g_{\lambda\mu}\cdot f))=\left(\frac{d}{dt}Y_\gamma^\beta\right)(a_\alpha^\gamma\cdot g_{\lambda\mu}\cdot f)+Y_\gamma^\beta\frac{d}{dt}(a_\alpha^\gamma\cdot g_{\lambda\mu}\cdot f)$$

$$=Y_\rho^\beta\left\{P_\gamma^\rho(a_\alpha^\gamma\cdot g_{\lambda\mu}\cdot f)+\frac{d}{dt}(a_\alpha^\gamma\cdot g_{\lambda\mu}\cdot f)\right\}$$

$$=Y_\rho^\beta(a_\gamma^\rho\cdot g_{\lambda\mu}\cdot f)\overline{P}_\alpha^\gamma$$

よって $Y_\gamma^\beta(a_\alpha^\gamma\cdot g_{\lambda\mu}\cdot f)=\overline{Y}_\alpha^\beta$ が上記の U_μ に対応する微分方程式系の解になることがわかった．$\overline{Y}_\alpha^\beta(0)=\delta_\alpha^\beta$ となる解 $\overline{Y}_\alpha^\beta(t)$ は明らかに

$$\overline{Y}_\alpha^\beta(t)=b_\gamma^\beta(g_{\lambda\mu}(x_0))Y_\rho^\gamma(t)a_\alpha^\rho(g_{\lambda\mu}(f(t)))\tag{4·84}$$

である．定義によって

$$\overline{\sigma}(t)=g_{\mu\lambda}(f(t))\sigma(t)g_{\lambda\mu}(x_0)$$

となる．これを $\overline{\rho}$ に代入すると

$$\overline{\rho}(t,g)=\widetilde{\varphi}_\mu(f(t),\ \overline{\sigma}(t)g)$$

$$=\widetilde{\varphi}_\mu(f(t),g_{\mu\lambda}(f(t))\sigma(t)g_{\lambda\mu}(x_0)g)$$

$$=\widetilde{\varphi}_\lambda(f(t),\sigma(t)g_{\lambda\mu}(x_0)g)=\rho(t,g_{\lambda\mu}(x_0)g)$$

$$\overline{\rho}_g=\rho_{g_{\lambda\mu}(x_0)g}\tag{4·85}$$

なる関係式が成り立つ．この式は ρ_g によってきまる曲線族が f のみによって定まることを示している．しかも (4·81) の右辺が Y_γ^β について 1 次同次式であるから，この曲線族は f によって表わされる曲線の媒介変数 t のとり方にかかわらず定まるものであることは明らかである．

C の部分弧 C_1 が $0\leqq t_1\leqq t\leqq t_2\leqq 1$ である区間 $[t_1,t_2]$ に対応するものとし，C_1 に対して上の同様に写像 σ_1,ρ_1 等をつくる．(4·80) の一般解が $C_\gamma^\beta Y_\alpha^\gamma(t)$ であることから $\sigma_1(t)=\sigma(t)g$, $t_1\leqq t\leqq t_2$ の形をしている．$\sigma_1(t_1)=e$ ゆえ，$\sigma_1(t)=\sigma(t)\sigma(t_1)^{-1}$ である．よって $t_1\leqq t\leqq t_2$ において

$$\rho_1(t,g)=\widetilde{\varphi}_\lambda(f(t),\sigma_1(t)g)$$

$$=\widetilde{\varphi}_\lambda(f(t),\sigma(t)\sigma(t_1)^{-1}g)=\rho(t,\sigma(t_1)^{-1}g)$$

である．したがって $\rho_{1,g}$ によってきまる B の曲線族は ρ_g によってきまる曲

線族の C_1 上にある部分弧の全体からなっていることがわかる.

以上の推論から有限個の C^1 級曲線弧がつながってできている曲線弧 C, $f: I \to X$ に対しても, C が重複点をもたなければ $\tilde{\pi}^{-1}(f(I))$ を単純に覆う曲線族が定まり, 互に $\mathfrak{G}$ における右移動によってうつりあう. しかも $\sigma(t) \in G$ であるからこの曲線が $\hat{B}$ の一点を通ればそれは全く $\hat{B}$ に含まれる. つまり $\hat{\pi}^{-1}(f(I))$ をも単純に覆うことがわかる. ただし, ここに曲線族がある領域または開集合を単純に覆うというのは, この集合の任意の点を通りただ一本のこの族の曲線があるように覆っていることを意味する. これらの C の上の曲線を C の上の**水平曲線**とよぶ. ここに現われた水平という述語の意味はこの節のおわりで明らかにする.

さて, 上に述べた $\sigma(t)$ の定義と (4·80)′ から

$$z_\alpha(\rho(t, g)) = \tilde{h}(\mathfrak{z}_\alpha(\rho(t, g))), \qquad g \in GL(m) \qquad (4\cdot 86)$$

が C に沿って平行なベクトル場をなしている. ここに $\tilde{h}$ は $f^{\#}\tilde{F}$ の誘導写像を表わすものとする. g を固定すると, この m 個の独立なベクトル場の組は C に沿って平行なベクトル場のつくる空間の基をなしている.

B の任意の点 b での接ベクトル $\mathfrak{v}$ は $\langle \mathfrak{v}, \theta_\alpha^\beta \rangle = 0$ であるとき与えられた接続について**水平**であるといい, ファイバーに接するとき**垂直な接ベクトル**であるという. θ_α^β は各点において m^2 個の独立な微分形式系をなしているから, 点 b での水平接ベクトルは $T_b(B)$ の n 次元の部分ベクトル空間をなす. これを $\Gamma(b)$ で表わせば, これは B 上の C^{r-t-1} 級の n 次元部分接空間の場をなす. これは (4·56) により $\tilde{\mathfrak{G}}$ の右移動 $r(g)$ によって不変, すなわち $r(g)_* \Gamma(b) = \Gamma(bg)$ である.

定理 4·7 X 内の C^1 級曲線上の水平曲線は, それへの接ベクトルがつねに水平接ベクトルであるような曲線である.

(証明) X 内の C^1 級曲線が $f: I \to X$ で与えられ, $\rho: I \to B, \tilde{\pi}\cdot\rho = f$ の接ベクトルがつねに水平であると仮定する. I の上で dt に双対な接ベクトル場は $\partial/\partial t$ である. 任意の点 $t_0 \in I$ において $\left\langle \rho_* \dfrac{\partial}{\partial t}, \theta_\alpha^\beta \right\rangle = 0$ である条件を書いてみよう. $f(t_0) \in U_\lambda$ として, $\tilde{\pi}^{-1}(U_\lambda)$ において

$$\rho(t)=\tilde{\varphi}_\lambda(f(t),\sigma(t))$$

と表わすことができる．(4·52) と (2·15) から

$$\left\langle \rho_*\left(\frac{\partial}{\partial t}(t_0)\right),\theta^\beta_\alpha\right\rangle=\left\langle f_*\left(\frac{\partial}{\partial t}(t_0)\right)+\sigma_*\left(\frac{\partial}{\partial t}(t_0)\right),b^\beta_\gamma(da^\gamma_\alpha+\omega_{(\lambda)}{}^\gamma_\sigma a^\sigma_\alpha)\right\rangle$$

$$=\left\langle f_*\left(\frac{\partial}{\partial t}(t_0)\right),(b^\beta_\gamma\cdot\sigma)\omega_{(\lambda)}{}^\gamma_\sigma(a^\sigma_\alpha\cdot\sigma)\right\rangle+\left\langle \sigma_*\left(\frac{\partial}{\partial t}(t_0)\right),b^\beta_\gamma da^\gamma_\alpha\right\rangle$$

$$=b^\beta_\gamma(\sigma(t_0))\left\langle\frac{\partial}{\partial t}(t_0),f^*\omega_{(\lambda)}{}^\gamma_\sigma\right\rangle a^\sigma_\alpha(\sigma(t_0))+\left\langle\frac{\partial}{\partial t}(t_0),(b^\beta_\gamma\cdot\sigma)d(a^\gamma_\alpha\cdot\sigma)\right\rangle$$

$$=b^\beta_\gamma(\sigma(t_0))\left\{P_{(\lambda)}{}^\gamma_\sigma(t_0)a^\sigma_\alpha(\sigma(t_0))+\frac{d(a^\gamma_\alpha\cdot\sigma)}{dt}(t_0)\right\}$$

よって

$$P_{(\lambda)}{}^\beta_\gamma a^\gamma_\alpha\cdot\sigma+\frac{d(a^\beta_\alpha\cdot\sigma)}{dt}=0$$

しかるに $b^\beta_\gamma a^\gamma_\alpha=\delta^\beta_\alpha$ であるから $(b^\beta_\gamma\cdot\sigma)d(a^\gamma_\alpha\cdot\sigma)=-d(b^\beta_\gamma\cdot\sigma)(a^\gamma_\alpha\cdot\sigma)$，上の式はつぎの関係式と同値である．

$$d(b^\beta_\alpha\cdot\sigma)=(b^\beta_\gamma\cdot\sigma)P_{(\lambda)}{}^\gamma_\alpha dt$$

$Y^\beta_\alpha(t)=b^\beta_\alpha(\sigma(t))$ とおけば，これは (4·81) そのものとなる．よってこの曲線が水平曲線であることが証明された．逆に水平曲線の接ベクトルが水平であることも明らかである．(終)

4·11　ホロノミー群

前節で考えた有限個の C^1 曲線をつないでできている x_0 と x_1 とを結ぶ曲線 C に対して，$\tilde{\pi}^{-1}(f(I))$ を覆う C 上の水平曲線の族によって x_1 上の $\tilde{\mathfrak{F}}$ のファイバー $Lx_1=\tilde{\pi}^{-1}(x_1)$ と，$\hat{\mathfrak{F}}$ のファイバー $G_{x_1}=\tilde{\pi}^{-1}(x_1)$ をそれぞれ x_0 上の L_{x_0}, G_{x_0} に対応させることができる．この対応を C **に随伴する変換**といい

$$h_C: L_{x_1}\to L_{x_0} \tag{4·87}$$
$$h_C(\rho(1,g))=\rho(0,g),\qquad g\in GL(m)$$

で定義される．これで G_{x_1} が G_{x_0} に移されることは (4·83) と $\sigma(t)\in G$ なることから明らかである．x_1 を x_2 に結ぶ同様な曲線 C_1 をとる．C と C_1 を

つないでできる曲線を CC_1 で表わすことにする．CC_1 の上の与えられた接続に関する水平曲線族は C と C_1 の上の水平曲線族をつないでできるから

$$h_{\mathrm{CC}_1}=h_{\mathrm{C}}\cdot h_{\mathrm{C}_1} \tag{4·88}$$

が成り立つ．C_1 がとくに x_1 から x_0 へ C を逆向きに走る曲線 C^{-1} であるとき，$h_{\mathrm{CC}^{-1}}$ は恒等変換であるから

$$h_{\mathrm{C}^{-1}}=(h_{\mathrm{C}})^{-1} \tag{4·89}$$

である．ところで (4·83) によって $r(g_0)(\rho(t,g))=\rho(t,gg_0)$ であるから，h_{C} は L_{x_1} から L_{x_0} への写像としてバンドル写像であって

$$r(g_0)\cdot h_{\mathrm{C}}=h_{\mathrm{C}}\cdot r(g_0) \tag{4·90}$$

であるが，つくり方から Y_{x1} から Y_{x0} への同型写像ともみることができる．

X の定点 x から出て x にもどる閉曲線で，C^1 級曲線弧をつないでできているものの全体を考える．ある閉曲線に対して途中同じ道を逆向きに相ついで引き返すとき，その部分をとり除いて進んでできる曲線をはじめの曲線と同値関係にありとする．つまり $\mathrm{C}=\mathrm{C}_1\mathrm{C}_2\cdots\mathrm{C}_m, \mathrm{C}_{i+1}=\mathrm{C}_i{}^{-1}, 1\leqq i<m$ のとき $\mathrm{C}\sim\mathrm{C}_1\cdots\mathrm{C}_{i-1}\mathrm{C}_{i+2}\cdots\mathrm{C}_m$ とすれば明らかにこれは，同値関係である．この関係によって上記の閉曲線の集合を類別すれば．この同値類の集まりは上に述べた閉曲線の積に関して群をつくる．これを $\Omega(x)$ で表わすことにし，われわれは曲線 C でそのままそれの属する同値類をも表わそう． しかるとき h_{C} はこの道の群 $\Omega(x)$ から Y_x の同型写像のつくる群への準同型な対応を定める．この準同型対応による $\Omega(x)$ の像 $H(x)$ を $\mathfrak{F}$ における与えられた接続の点 x における**広義のホロノミー群**という．

2点 x_0 と x_1 におけるホロノミー群 $H(x_0)$ と $H(x_1)$ との関係を見よう．x_0 と x_1 を結ぶ部分的に C^1 級の曲線 C をとる．任意の $\mathrm{C}_0\in\Omega(x_0)$ に対して $\mathrm{C}^{-1}\mathrm{C}_0\mathrm{C}=\mathrm{C}_1$ は $\Omega(x_1)$ の元である．このようにして群 $\Omega(x_0)$ と $\Omega(x_1)$ の間に同型対応がつけられる．(4·88) によって

$$h_{\mathrm{C}}{}^{-1}h_{\mathrm{C}_0}h_{\mathrm{C}}=h_{\mathrm{C}_1} \tag{4·91}$$

によって $H(x_0)$ と $H(x_1)$ は h_{C} を介して同型となる．いま $x_0\in U_\lambda$ として，任意の $\mathrm{C}\in\Omega(x_0)$ に対し $\tilde{\varphi}_{\lambda,x_0}{}^{-1}h_{\mathrm{C}}\varphi_{\lambda,x_0}\in G$ となるから $\tilde{\varphi}_{\lambda,x_0}{}^{-1}H(x_0)\tilde{\varphi}_{\lambda,x_0}$

は G の部分群である．さらに $x_0 \in U_\mu$ であれば

$$\tilde{\varphi}_{\mu,x_0}{}^{-1} hc\tilde{\varphi}_{\mu,x_0} = g_{\mu\lambda}(x_0)(\tilde{\varphi}_{\lambda,x_0}{}^{-1} hc\tilde{\varphi}_{\lambda,x_0}) g_{\lambda\mu}(x_0) \qquad (4\cdot 92)$$

となるから，$H(x_0)$ は $\tilde{\mathfrak{F}}$ の座標函数 $\tilde{\varphi}_\lambda$ を介して G の部分群に直したとき，$\tilde{\varphi}_\mu$ を介して直したものと互に座標変換 $g_{\mu\lambda}(x_0)$ による内部同型対応によってうつりあうことがわかった．

$\Omega(x)$ の曲線の中で点 x に連続的に収縮させることができるようなものの集合を $\Omega^0(x)$ とすれば，$\Omega^0(x)$ もまた群をつくる．hc による $\Omega^0(x)$ の像を $H^0(x)$ とすれば，これは $H(x)$ の部分群となる．これを点 x での**狭義のホロノミー群**という．$H^0(x)$ に対しても関係式 (4·91), (4·92) が成り立つことは明らかである．

4·12　一般の場合の接続

この節では一般の微分可能なファイバー・バンドルにおける接続について説明し，4·5 で述べたベクトル・バンドルの接続との関係を調べてみよう．

G は Lie 群，すなわち解析的位相群を表わすものとする．G の任意の元 g に対応する左移動と右移動をそれぞれ l_g と r_g で表わせば，定義によって

$$l_g(g_1) = gg_1, \qquad r_g(g_1) = g_1 g, \qquad g_1 \in G$$

しかるとき $(l_g)_*$ と $(r_g)_*$ は $T(G)$ 上の位相写像で接空間を接空間にうつす．(2·14)によって

$$(l_{g_1g_2})_* = (l_{g_1})_* \cdot (l_{g_2})_*, \qquad (r_{g_1g_2})_* = (r_{g_2})_* \cdot (r_{g_1})_*$$

であるから，$(l_g)_*$ と $(r_{g^{-1}})_*, g \in G$ は空間 $T(G)$ の上での変換群としての G の表現を与える．G の単位元 e での任意の接ベクトル $\mathfrak{v}$ に対して G の接ベクトル場 ξ を

$$\xi(g) = (l_g)_* \mathfrak{v}, \qquad g \in G \qquad (4\cdot 93)$$

で定義すれば，これは G の左移動に関して不変なことは明らかである．逆に G の接ベクトル場で左移動によって不変なものはこのようにして得られる．よって G 上の接ベクトル場で左移動によって不変なものの全体は $T_e(G)$ と同型なベクトル空間をなす．これの一組の基を $\{\xi_1, \cdots \xi_N\}, N = \dim G$ とする．点 $g \in G$ において $\{\xi_1(g), \cdot\cdot, \xi_N(g)\}$ と双対な基を $\{\bar{\omega}^1(g), \cdots, \bar{\omega}^N(g)\}$ と

すれば $\{\bar{\omega}^1, \cdots, \bar{\omega}^N\}$ は左移動に関して不変な一次の微分形式であって，しかもこのような微分形式のつくる N 次元ベクトル空間の基をなす．ところで

$$d\bar{\omega}^r = \frac{1}{2} C_{st}{}^r \bar{\omega}^s \wedge \bar{\omega}^t, \qquad C_{st}{}^r = -C_{ts}{}^r \tag{4·94}$$

と表わすことができるが，(2·12) と $\bar{\omega}^r$ が $(l_g)^*$ で不変なことから

$$(l_g)^* d\bar{\omega}^r = d((l_g)^* \bar{\omega}^r) = d\bar{\omega}^r$$
$$= \frac{1}{2}((l_g)^* C_{st}{}^r)) \bar{\omega}^s \wedge \bar{\omega}^r,$$

よって

$$(l_g)^* C_{st}{}^r = C_{st}{}^r$$

が出る．これは $C_{st}{}^r$ が定数であることを意味する．これらは基 $\{\xi_1, \cdots, \xi_N\}$ に関する G の**構造定数**とよばれているものである．(4·94) の外微分から構造定数は **Jacobi の恒等式**とよばれる関係式

$$C_{ls_1}{}^r C_{s_2 s_3}{}^l + C_{ls_2}{}^r C_{s_3 s_1}{}^l + C_{ls_3}{}^r C_{s_1 s_2}{}^l = 0 \tag{4·95}$$

をみたすことがわかる．さて任意の $g \in G$ に対応する**内部自己同型** σ_g

$$\sigma_g(g_1) = g g_1 g^{-1}, \qquad g_1 \in G$$

は $\sigma_g(e) = e$ であるから $(\sigma_g)_*$ は $T_e(G)$ 上に正則な1次変換を引き起すこれを g に**随伴する変換**といい $\mathrm{ad}(g)$ で表わすことにする．

$$\mathrm{ad}(g)(\xi_r(e)) = \mathrm{ad}(g)^t_r \xi_t(e) \tag{4·96}$$

とおくと，(1·9) によって

$$(\mathrm{ad}(g))^*(\bar{\omega}^t(e)) = \mathrm{ad}(g)^t_r \bar{\omega}^r(e) \tag{4·96$'$}$$

で，しかも $(\mathrm{ad}(g))^*$ は $(\sigma_g)^*$ によって $T_e{}^*(G)$ 上に導かれる正則1次変換となっている．$\sigma_g = l_g \cdot r_g{}^{-1} = r_g{}^{-1} \cdot l_g$ であるから

$$(\sigma_g)^*(\bar{\omega}^t(g_1)) = ((\sigma_g)^* \cdot (l_{g_1{}^{-1}})^*)(\bar{\omega}^t(e))$$
$$= ((l_{g^{-1} g_1{}^{-1} g})^* \cdot (\sigma_g)^*)(\bar{\omega}^t(e))$$
$$= \mathrm{ad}(g)^t_r \bar{\omega}^r(g^{-1} g_1 g)$$

よって

$$(\sigma_g)^* \bar{\omega}^t = \mathrm{ad}(g)^t_r \bar{\omega}^r \tag{4·97}$$

が成立する．つぎに写像 $\psi: G\times G\to G$ を G の乗法で $\psi(g_1, g_2)=g_1g_2$ と定義し，公式 (2·13)′ を用いれば $T^*_{g_1g_2}(G)$ において

$$\psi^*=(r_{g_2})^*\times 0+0\times(l_{g_1})^* \tag{4·98}$$

が成り立つ．ただし，ここに右辺の 0 はそれぞれ $T^*_{g_1g_2}(G)$ を $T^*_{g_2}(G)$ と $T_{g_1}{}^*(G)$ の零元にうつす写像を表わすものとする．

さて，X を底空間として座標変換が $g_{\mu\lambda}: U_\lambda\cap U_\mu\to G$ が与えられているファイバー・バンドルを考えよう．$U_\lambda\cap U_\mu$ における微分形式系

$$\overset{r}{\overline{\omega}}_{(\mu\lambda)}=g_{\mu\lambda}{}^*(\overline{\omega}^r)$$

を定義する．$U_\lambda\cap U_\mu\cap U_\nu\neq\phi$ において $g_{\nu\lambda}=g_{\nu\mu}g_{\mu\lambda}$ であるから，(2·15)′ と (4·97), (4·98) を用いれば $T^*_{g_{\nu\lambda}(x)}(G)$ において

$$g_{\nu\lambda}{}^*=g_{\nu\mu}{}^*\cdot(r_{g_{\mu\lambda}(x)})^*+g_{\mu\lambda}{}^*\cdot(l_{g_{\nu\mu}(x)})^*$$

が成り立つ．したがって点 x において

$$\begin{aligned}\overset{r}{\overline{\omega}}_{(\nu\lambda)}&=(g_{\nu\mu}{}^*\cdot(r_{g_{\mu\lambda}(x)})^*)(\overline{\omega}^r)+g_{\mu\lambda}{}^*(\overline{\omega}^r)\\&=(g_{\nu\mu}{}^*\cdot(\sigma_{g_{\lambda\mu}(x)}))^*)(\overline{\omega}^r)+\overset{r}{\overline{\omega}}_{(\mu\lambda)}\\&=g_{\nu\mu}{}^*(\mathrm{ad}(g_{\lambda\mu}(x))^r_t\overline{\omega}^t)+\overset{r}{\overline{\omega}}_{(\mu\lambda)}=\mathrm{ad}(g_{\lambda\mu}(x))^r_t\overset{r}{\overline{\omega}}_{(\nu\mu)}+\overset{r}{\overline{\omega}}_{(\mu\lambda)}\end{aligned}$$

であるからつぎの関係式

$$\overset{r}{\overline{\omega}}_{(\nu\lambda)}=\mathrm{ad}(g_{\mu\lambda}{}^{-1})^r_t\overset{t}{\overline{\omega}}_{(\nu\mu)}+\overset{r}{\overline{\omega}}_{(\mu\lambda)} \tag{4·99}$$

が導き出された．

考えているファイバー・バンドルに対して，X の各座標近傍 U_λ において N 個の微分形式系 $\overset{r}{\overline{\omega}}_{(\lambda)}$ がつぎの条件

$$\overset{r}{\overline{\omega}}_{(\mu\lambda)}=-\mathrm{ad}(g_{\mu\lambda}{}^{-1})^r_t\overset{t}{\overline{\omega}}_{(\mu)}+\overset{r}{\overline{\omega}}_{(\lambda)} \tag{4·100}$$

をみたすように与えられたとき，このような微分形式系の集まり $\{\overset{r}{\overline{\omega}}_{(\lambda)}\}$ はこのファイバー・バンドルに一つの接続を定めるという． 条件 (4·100) は (4·99) に矛盾しない．実際 (4·100) を (4·99) の右辺に代入すると

$$\begin{aligned}&\mathrm{ad}(g_{\mu\lambda}{}^{-1})^r_t\{-\mathrm{ad}(g_{\nu\mu}{}^{-1})^t_s\overset{s}{\overline{\omega}}_{(\nu)}+\overset{t}{\overline{\omega}}_{(\mu)}\}-\mathrm{ad}(g_{\mu\lambda}{}^{-1})^r_t\overset{t}{\overline{\omega}}_{(\mu)}+\overset{r}{\overline{\omega}}_{(\lambda)}\\&\quad=-\mathrm{ad}(g_{\nu\lambda}{}^{-1})^r_s\overset{s}{\overline{\omega}}_{(\nu)}+\overset{r}{\overline{\omega}}_{(\lambda)}=\text{左辺}\end{aligned}$$

である．Y を m 次元のベクトル空間として，その上の正則１次変換の群 $GL(m)$ の中への表現 $M: G\to GL(m)$ があるとする．さて $GL(m)$ の左移動で不変な微分形式は $b^\beta_\gamma da^\gamma_\alpha$ の１次結合であるが

$$M\cdot l_g = l_{M(g)}\cdot M, \qquad g\in G$$

であるから，(2・14)′ を用いて $M^*(b^\beta_\gamma da^\gamma_\alpha)=(b^\beta_\gamma\cdot M)d(a^\gamma_\alpha\cdot M)$ は G の左移動で不変な微分形式をなす．したがってこれらが

$$M^*(b^\beta_\gamma da^\gamma_\alpha)=\sum_{r=1}^N \bar{M}_{(r)}{}^\beta_\alpha\bar{\omega}^r \tag{4・101}$$

と表わされる N 個の定数値行列 $\bar{M}_{(r)}=(\bar{M}_{(r)}{}^\beta_\alpha)$, $r=1,\cdots,N$ がある．そこで U_λ における微分形式系 $\omega_{(\lambda)}{}^\beta_\alpha$ を

$$\omega_{(\lambda)}{}^\beta_\alpha=\sum \bar{M}_{(r)}{}^\beta_\alpha\bar{\omega}^r_{(\lambda)} \tag{4・102}$$

で定義する．$U_\lambda\cap U_\mu\neq\phi$ の各点 x において (4・100) と (4・101) を用いると

$$\begin{aligned}\omega_{(\mu\lambda)}{}^\beta_\alpha &\equiv (M\cdot g_{\mu\lambda})^*(b^\beta_\gamma da^\gamma_\alpha)=(b^\beta_\gamma\cdot M\cdot g_{\mu\lambda})d(a^\gamma_\alpha\cdot M\cdot g_{\mu\lambda})\\ &=\sum \bar{M}_{(r)}{}^\beta_\alpha\bar{\omega}^r_{(\mu\lambda)}\\ &=\sum \bar{M}_{(r)}{}^\beta_\alpha(-\mathrm{ad}(g_{\mu\lambda}{}^{-1})^r_t\bar{\omega}^t_{(\mu)}+\bar{\omega}^r_{(\lambda)})\\ &=-\sum_r \bar{M}_{(r)}{}^\beta_\alpha\mathrm{ad}(g_{\mu\lambda}{}^{-1})^r_t\bar{\omega}^t_{(\mu)}+\bar{\omega}_{(\lambda)}{}^\beta_\alpha.\end{aligned}$$

ところで $M\cdot\sigma_g=\sigma_{M(g)}\cdot M$ であるから，(4・97) によって

$$(\sigma_g{}^*\cdot M^*)(b^\beta_\gamma da^\gamma_\alpha)=\sigma_g{}^*(\sum \bar{M}_{(r)}{}^\beta_\alpha\bar{\omega}^r)=\sum \bar{M}_{(r)}{}^\beta_\alpha ad(g)^r_t\bar{\omega}^t$$

$$\begin{aligned}(M^*\cdot\sigma_{M(g)}{}^*)(b^\beta_\gamma da^\gamma_\alpha) &=(M^*\cdot(r_{M(g^{-1})})^*)(b^\beta_\gamma da^\gamma_\alpha)\\ &=M^*(a^\beta_\rho(M(g))(b^\rho_\gamma da^\gamma_\delta)a^\delta_\alpha(M(g^{-1})))\\ &=a^\beta_\rho(M(g))M^*(b^\rho_\gamma da^\gamma_\delta)a^\delta_\alpha(M(g^{-1}))\\ &=a^\beta_\rho(M(g))(\sum \bar{M}_{(r)}{}^\rho_\delta\bar{\omega}^r)a^\delta_\alpha(M(g^{-1}))\end{aligned}$$

である．したがって

$$\sum \bar{M}_{(r)}{}^\beta_\alpha\mathrm{ad}(g_{\mu\lambda}{}^{-1})^r_t=(a^\beta_\rho\cdot M\cdot g_{\lambda\mu})\bar{M}_{(t)}{}^\rho_\gamma(a^\gamma_\alpha\cdot M\cdot g_{\mu\lambda})$$

を得る．これを用いると関係式

$$\omega_{(\mu\lambda)}{}_{\alpha}^{\beta}+(a_{\rho}^{\beta}\cdot M\cdot g_{\lambda\mu})\,\omega_{(\mu)}{}_{\gamma}^{\rho}(a_{\alpha}^{\gamma}\cdot M\cdot g_{\mu\lambda})=\omega_{(\lambda)}{}_{\alpha}^{\beta} \qquad (4\cdot103)$$

が導き出される．この式は (4·48) にほかならない．つまり G をバンドルの群にもつファイバー・バンドルの接続から，表現 $M: G \longrightarrow GL\,(m)$ によって誘導されるベクトル・バンドルに対して接続が (4·102) によって自然に定まることがわかった．

問 1　$\sum_{r}\bar{M}_{(r)}{}_{\alpha}^{\beta}C_{st}{}^{r}+\bar{M}_{(s)}{}_{\gamma}^{\beta}\bar{M}_{(t)}{}_{\alpha}^{\gamma}-\bar{M}_{(t)}{}_{\gamma}^{\beta}\bar{M}_{(s)}{}_{\alpha}^{\gamma}=0$ を証明せよ．

問 2　$\Omega_{(\lambda)}{}_{\alpha}^{\beta}\equiv d\omega_{(\lambda)}{}_{\alpha}^{\beta}+\omega_{(\lambda)}{}_{\gamma}^{\beta}\wedge\omega_{(\lambda)}{}_{\alpha}^{\gamma}=\sum\bar{M}_{(r)}{}_{\alpha}^{\beta}\left(d\bar{\varpi}_{(\lambda)}^{r}-\frac{1}{2}\sum C_{st}{}^{r}\bar{\varpi}_{(\lambda)}^{s}\wedge\bar{\varpi}_{(\lambda)}^{t}\right)$ を証明せよ．$\Omega_{(\lambda)}^{r}\equiv d\bar{\varpi}_{(\lambda)}^{r}-\frac{1}{2}\sum C_{st}{}^{r}\bar{\varpi}_{(\lambda)}^{s}\wedge\bar{\varpi}_{(\lambda)}^{t}$ を与えられた接続の U_{λ} 上における**曲率形式**とよぶ．

第 5 章　擬似接続幾何学

5·1　擬似幾何学

n 次元の座標空間 R^n の座標を $x^1, \cdots, x^n$ とする．つまり n 個の数直線の直積を考え，i 番目の数直線の座標が x^i である．

さて，この空間の変換

$$x'^j = a_i{}^j x^i + a^j, \qquad |a_i{}^j| \neq 0 \tag{5·1}$$

を R^n の**擬似変換**とよぶ．R^n の擬似変換は n^2+n 個の実定数 $a_i{}^j, a^j$ に関係し，相異なる $a_i{}^j, a^j$ の組には相異なる擬似変換 (5·1) が対応することは明らかである．よって $\{a_i{}^j, a^j\}$ からなる定数の組が擬似変換そのものを表わすと考えれば，すべての擬似変換の集合は n^2+n 次元の座標空間の中で $|a_i{}^j| \neq 0$ である開部分集合と考えることができる．このようにして擬似変換の集合に位相を入れる．しかも $a_i{}^j, a^j$ はその上での函数として座標系をつくっていると考えれば C^ω 級多様体である．二つの擬似変換 g_1, g_2

$$x'^j = a_i{}^j(g_\alpha) x^j + a^j(g_\alpha), \qquad \alpha = 1, 2$$

に対して，その積 $g_2 g_1$ は

$$\begin{aligned} x'^j &= a_i{}^j(g_2)\{a_k{}^i(g_1)x^k + a^i(g_1))\} + a^j(g_2) \\ &= a_i{}^j(g_2) a_k{}^i(g_1) x^k + a_i{}^j(g_2) a^i(g_1) + a^j(g_2) \end{aligned}$$

であるから，やはり擬似変換であって，積の公式は

$$a_i{}^j(g_2 g_1) = a_k{}^j(g_2) a_i{}^k(g_1), \quad a^j(g_2 g_1) = a_i{}^j\,(g_2) a^i(g_1) + a^j(g_2) \tag{5·2}$$

である．(5·1) から明かなように擬似変換 g は R^n の 1 対 1 変換であって，逆変換 g^{-1} も擬似変換である．

$$a_i{}^j(g^{-1}) = b_i{}^j(g), \qquad a^j(g^{-1}) = b^j(g) \tag{5·3}$$

とおけば，(5·2) から

$$a_k{}^j(g) b_i{}^k(g) = b_k{}^j(g) a_i{}^k(g) = \delta_i{}^j, \qquad b^j(g) = -b_i{}^j(g) a^i(g) \tag{5·4}$$

以上から擬似変換の全体は解析的な位相群となり，しかも (5·1) の形が示すように変換群として解析的連続変換群をなす．これを**擬似変換群**とよぶ．

F. Klein によれば，R^n の中の図形の性質で任意の擬似変換によって不変なものを研究するのが n 次元擬似幾何学である．擬似変換群が作用する場所としての R^n を n 次元**擬似空間**という．n 次元擬似空間を A^n で表わそう．

擬似空間ではベクトルの概念が成り立つ．二点 x と y の組 (x, y) の集合において $(x, y)\sim(x_1, y_1)$ とは $y^i-x^i=y_1{}^i-x_1{}^i$ であるとして類別したものを考え，各々の類をベクトルとよぶ．(x, y) の属するベクトルを $\overrightarrow{xy}$ で表わす．擬似変換 (5·1) による x, y, x_1, y_1 の像を x', y', x_1', y_1' とすれば $(x, y)\sim(x_1, y_1)$ なるとき $(x', y')\sim(x_1', y_1')$ であるから $\overrightarrow{xy}$ が $\overrightarrow{x'y'}$ に移されるとしてよろしい．$m+1$ 個の点 $x_0, x_1, \cdots, x_m$ は m 個のベクトル $\overrightarrow{x_0x_1}, \cdots, \overrightarrow{x_0x_m}$ が1次独立のとき1次独立であるという．容易にわかるように，この1次独立性も擬似空間の概念であって，$m+1$ 個の点の中のいずれを基準にしてベクトルを考えてその1次独立性を入れても同じであることは容易に証明することができる．

1次独立な $m+1$ 個の点 $x_0, x_1, \cdots, x_m$ に対して，その和が1である実数 $\lambda^0, \cdots, \lambda^m$ をとり $\lambda^0x_0+\lambda^1x_1+\cdots+\lambda^m x_m$ はその座標が

$$x^i=\lambda^0 x_0{}^i+\lambda^1 x_1{}^i+\cdots+\lambda^m x_m{}^i \tag{5·5}$$

である点 $x=(x^i)$ を表わすものとする．擬似変換 (5·1) によって

$$x'^j=a_i{}^j x^i+a^j=a_i{}^j\Bigl(\sum_\alpha \lambda^\alpha x_\alpha{}^i\Bigr)+a^j=\sum_\alpha \lambda^\alpha(a_i{}^j x_\alpha{}^i+a^j)$$

であるから，点 $\sum\lambda^\alpha x_\alpha, \sum\lambda^\alpha=1$ なる概念は擬似空間の概念である．その和が1であるすべての可能な λ^α の組からできる点 $\sum\lambda^\alpha x_\alpha$ の軌跡を $x_0, x_1, \cdots, x_m$ が張る m 次元平面といい，とくに $m=1$ のとき直線，$m=2$ のとき平面，$m=n-1$ のとき超平面という．異なった λ^α の組に対して異なった点が対応することは明らかであり，(5·5) は

$$x^i=x_0{}^i+\sum_{\alpha=1}^m \lambda^\alpha(x_\alpha{}^i-x_0{}^i) \tag{5·6}$$

と表わすことができるから，点 $x_0, x_1, \cdots, x_m$ は m 次元平面の座標系を定めると考えることができる．すなわち x_0 が原点，直線 $\overline{x_0x_\alpha}$ が座標軸，$\overrightarrow{x_0x_\alpha}$ がその上の単位ベクトル，λ^α が座標を表わす．とくに $m=n$ のときに R^n の任

意の点 x に対して $\overrightarrow{x_0x}=\sum\lambda^i\overrightarrow{x_0x_i}$ なる λ^i が一意にきまるから，$x_0, x_1, \cdots, x_n$ は R^n に座標系を定めると考えられる．これを擬似空間の**擬似座標**または Descartes 座標とよぶ．

5·2 擬 似 接 続

n 次元の連結 C^r 級多様体 X の接ベクトル・バンドル $\mathfrak{F}=\{T(X), X, \pi, \tilde{V}\}$ に前章の理論を適用してみよう．$G=GL(n)$ であるから，$\mathfrak{F}$ の連合主ファイバー・バンドル $\tilde{\mathfrak{F}}=\{B, X, \tilde{\pi}, GL(n)\}$ と $\hat{\mathfrak{F}}$ とは一致する．$\tilde{\mathfrak{F}}$ は $\mathfrak{F}$ の標構のつくるファイバー・バンドルである．$\mathfrak{F}$ に接続が与えられていると仮定しよう．

座標近傍 (U, u) における $\mathfrak{F}$ と $\tilde{\mathfrak{F}}$ の座標函数 $\varphi_U : U\times\tilde{V}\to\pi^{-1}(U)$, $\tilde{\varphi}_U : U\times GL(n)\to\tilde{\pi}^{-1}(U)$ は (2·16) と (4·41) によって

$$\varphi_U(x, \tilde{e}_i)=\frac{\partial}{\partial u^i}(x), \qquad \tilde{\varphi}_U(x, g)=\left(x, \frac{\partial}{\partial u^j}(x)a_i{}^j(g)\right) \tag{5·7}$$

ここに $\{\tilde{e}_1, \cdots, \tilde{e}_n\}$ は $\tilde{V}$ の定まった一つの基，$\{\tilde{e}^1, \cdots, \tilde{e}^n\}$ はその双対基を表わす．座標近傍 (U, u) における標構の場 $\tilde{\varphi}_U(x, e)=\left(x, \dfrac{\partial}{\partial u^i}(x)\right)$ をこの座標近傍に関する**自然標構**とよぶ．他の座標近傍 (V, v) に対して $U\cap V\neq\phi$ のとき $g_{VU} : U\cap V\to GL(n)$ は (2·21)

$$g_{VU}(x)\tilde{e}_i=\frac{\partial v^j}{\partial u^i}\tilde{e}_j, \qquad (g_{UV}(x))^*\tilde{e}^i=\frac{\partial u^i}{\partial v^j}\tilde{e}^j \tag{5·8}$$

である．座標近傍 (U, u) に関する自然標構および**双対自然標構**の各接ベクトル場 $\dfrac{\partial}{\partial u^i}$ と各共変接ベクトル場 du^i の共変微分は (4·47) と (4·47)′ により

$$D\frac{\partial}{\partial u^i}=\frac{\partial}{\partial u^j}\otimes\omega_{Ui}^{\ j}, \qquad \omega_{Ui}^{\ j}=\Gamma_{U\,ki}^{\ j}du^k \tag{5·9}$$

$$Ddu^j=-du^i\otimes\omega_{Ui}^{\ j} \tag{5·9)′}$$

であって，$T(X)$ の接続ゆえ，$U\cap V$ では (4·41) により

$$a_i{}^j\cdot g_{VU}=\frac{\partial v^j}{\partial u^i}, \qquad b_i{}^j\cdot g_{VU}=\frac{\partial u^j}{\partial v^i} \tag{5·10}$$

であるから (4·48) は

$$\omega_{Ui}^{\ j}=\frac{\partial u^j}{\partial v^k}\left(d\frac{\partial v^k}{\partial u^i}+\omega_{Vh}^{\ k}\frac{\partial v^h}{\partial u^i}\right)$$

または

$$d\frac{\partial v^k}{\partial u^i}=\frac{\partial v^k}{\partial u^h}\omega_{Ui}^{\ h}-\omega_{Vh}^{\ k}\frac{\partial v^h}{\partial u^i}$$

となる．したがって接続の径数の間の関係として，

$$\frac{\partial}{\partial u^j}\left(\frac{\partial v^k}{\partial u^i}\right)=\frac{\partial^2 v^k}{\partial u^j\partial u^i}=\frac{\partial v^k}{\partial u^h}\Gamma_{U\,ji}^{\ \ h}-\Gamma_{V\,lh}^{\ \ k}\frac{\partial v^l}{\partial u^j}\frac{\partial v^h}{\partial u^i} \tag{5·11}$$

が出てくる．このような接続が $T(X)$ に与えられた多様体 X を**擬似接続空間**という．この接続を表わす B 上の微分形式系 $\theta_i^{\ j}$ は (4·52) により $\tilde{\pi}^{-1}(U)$ では

$$\tilde{\varphi}_U{}^*\theta_i^{\ j}=b_k^{\ j}(da_i^{\ k}+\omega_h^{\ k}a_i^{\ h}),\qquad \omega_h^{\ k}=\omega_{Uh}^{\ \ k} \tag{5·12}'$$

$\tilde{\mathfrak{F}}$ の射影 $\tilde{\pi}: B\to X$ による誘導バンドル $\tilde{\pi}^{\#}\mathfrak{F}=\{\Sigma, B, q, \tilde{V}\}$ の誘導写像を $h:\Sigma\to T(X)$ とする．標構 $b=(x, \mathrm{e}_i(b))$, $\mathrm{e}_i(b)\in T_x(X)$, $x=\pi(b)$ として $\tilde{\pi}^{\#}\mathfrak{F}$ の切断 $\mathfrak{z}_i$ を (4·60) により

$$h(\mathfrak{z}_i(b))=\mathrm{e}_i(b),\qquad b\in B \tag{5·13}$$

で定義し，$\tilde{\pi}^{\#}\mathfrak{F}$ での共変微分を

$$\tilde{D}\mathfrak{z}_i=\mathfrak{z}_j\otimes\theta_i^{\ j} \tag{5·14}$$

で定義する．以上は前章で論じたことを $T(X)$ に適用したものである．

さて B 上には $\theta_i^{\ j}$ のほかに n 個の微分形式が定義できることを示そう．$\pi^{-1}(U)$ で

$$\theta^j=(\tilde{\varphi}_U{}^{-1})^*b_i^{\ j}du^i \tag{5·15}$$

とおく．$h_{VU}: U\cap V\to(U\cap V)\times GL(n)$ を $h_{VU}(x, g)=(x, g_{VU}(x)g)$ として，(4·54) にならえば，$\tilde{\varphi}_V{}^{-1}=h_{VU}\cdot\tilde{\varphi}_U{}^{-1}$ であるから $\tilde{\pi}^{-1}(U\cap V)$ 上では

$$(\tilde{\varphi}_V{}^{-1})^*(b_i^{\ j}dv^i)=(\tilde{\varphi}_U{}^{-1})^*h_{VU}{}^*(b_i^{\ j}dv^i),$$

$$\begin{aligned}(h_{VU}{}^*(b_i^{\ j}dv^i))(x, g)&=b_i^{\ j}(g_{VU}(x)g)(d(v^i\cdot h_{VU})(x, g))\\&=b_k^{\ j}(g)b_i^{\ k}(g_{VU}(x))dv^i(x)\end{aligned}$$

$$=b_k{}^j(g)\frac{\partial u^k}{\partial v^i}(x)dv^i(x)=b_k{}^j(g)du^k(x)$$

よって

$$(\tilde{\varphi}_U{}^{-1})^*b_i{}^jdu^i=(\tilde{\varphi}_V{}^{-1})^*b_i{}^jdv^i$$

したがって (5·15) によって定義される θ^j は B 全体で定義された微分形式をなす. (5·12) と (5·15) の形からすぐわかるように n^2+n 個の微分形式系 $\theta_i{}^j, \theta^j$ は B の各点で独立であって, しかも $\dim B=n^2+n$ であるから共変接空間の基をなす.

θ^j の $\tilde{\pi}^\# \mathfrak{T}$ における意味を (5·14) に応じてつけてみる. $T_1{}^1(X)=T(X)\otimes T^*(X)$ ($\mathfrak{T}\otimes\mathfrak{T}^*$ の略記) の座標近傍 (U, u) における C^{r-1} 級の局所切断

$$dp=\frac{\partial}{\partial u^i}\otimes du^i \qquad (5\cdot16)$$

を考える. $U\cap V$ においては (2·10) によって

$$\frac{\partial}{\partial u^i}\otimes du^i=\frac{\partial}{\partial v^j}\frac{\partial v^j}{\partial u^i}\otimes\frac{\partial u^i}{\partial v^k}dv^k=\frac{\partial}{\partial v^i}\otimes dv^i$$

であるから, (5·16) で定義される dp は X の上での $\tilde{V}_1{}^1=\tilde{V}\otimes\tilde{V}^*$ 型の混合テンソル場をなし, いわゆる Kronecker の $\delta_i{}^j$ を成分とするテンソルである. なおここに dp は右辺を表わす記号で, d にも p にも独立に意味はない. 4·7 で定義した $\tilde{\pi}^0: \Psi^l(\mathfrak{T})\to\Psi^l(\tilde{\pi}^\#\mathfrak{T})$ を用いて $\tilde{\pi}^0\otimes\tilde{\pi}^*$ による dp の像を調べよう. $B\ni b$ に対して, $\tilde{\pi}(b)=x\in U$, $b=\tilde{\varphi}_U(x, g)$ とすれば

$$h(\mathfrak{z}_i(b))=\mathrm{e}_i(b)=\frac{\partial}{\partial u^k}(x)a_i{}^k(g)$$

であるから, (4·59) と (4·64) により $\tilde{\pi}^{-1}(U)$ において

$$((\tilde{\pi}^0\otimes\tilde{\pi}^*)(dp))(b)=\left((\tilde{\pi}^0\otimes\tilde{\pi}^*)\left(\frac{\partial}{\partial u^k}a_i{}^k(g)\otimes b_h{}^i(g)du^h\right)\right)(b)$$

$$=\left(\tilde{\pi}_0\left(\frac{\partial}{\partial u^k}a_i{}^k(g)\right)\right)(b)\otimes(\tilde{\pi}^*(b_h{}^i(g)du^h))(b)$$

$$=(h|V_b)^{-1}\left(\left(\frac{\partial}{\partial u^k}a_i{}^k(g)\right)(x)\right)\otimes b_h{}^i(g)(\tilde{\pi}^*du^h)(b)$$

$$=(h|V_b)^{-1}(h(\mathfrak{z}_i(b)))\otimes b_h{}^i(g)(\tilde{\pi}^*du^h)(b)$$

$$=\mathfrak{z}_i(b)\otimes b_h{}^i(g)(\tilde{\pi}^*du^h)(b)$$

しかるに $\theta^j(b)=((\tilde{\varphi}_U{}^{-1})^*b_h{}^jdu^h)(b)=b_h{}^j(g)(\tilde{\pi}^*du^h)(b)$ であるから dp は

$$(\tilde{\pi}^0\otimes\tilde{\pi}^*)(dp)=\mathfrak{z}_i\otimes\theta^i \tag{5·17}$$

なる $\tilde{\pi}^\#\mathfrak{T}\otimes T^*(B)$ の C^{r-1} 級切断にうつされた．これを $d\mathfrak{p}$ で表わそう．

$\Psi^l(T(X))\ni\xi$ が (U,u) において $\xi=\dfrac{\partial}{\partial u^i}\xi^i$ と表わされたとすれば

$$D\xi=\frac{\partial}{\partial u^i}\otimes(d\xi^i+\omega_j{}^i\xi^j),\qquad \omega_j{}^i=\omega_{Uj}{}^i$$

であるから

$$D\xi^i\equiv d\xi^i+\omega_j{}^i\xi^j=\xi^i{}_{|j}du^j \tag{5·18}$$

と表わすことができる．$\xi^i{}_{|j}$ を ξ^i の**座標 u^j に関する共変微分**とよぶ．さて $\Psi^l(\tilde{\pi}^\#\mathfrak{T})\ni\eta=\tilde{\pi}^0\xi=\mathfrak{z}_i\eta^i$ とおくと (5·14) によって

$$\tilde{D}\eta=\mathfrak{z}_i\otimes(d\eta^i+\theta_j{}^i\eta^j)$$

であるが，(4·64) によって (U,u) においては θ^i の定義により

$$\tilde{D}\eta=(\tilde{\pi}^0\otimes\tilde{\pi}^*)D\xi=(\tilde{\pi}^0\otimes\tilde{\pi}^*)\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\otimes\xi^i{}_{|j}du^j\right)$$
$$=((b_k{}^i\xi^k{}_{|h}a_j{}^h)\cdot\tilde{\varphi}_U{}^{-1})\mathfrak{z}_i\otimes\theta^j$$

であるから

$$\tilde{D}\eta^i\equiv d\eta^i+\theta_j{}^i\eta^j=((b_k{}^i\xi^k{}_{|h}a_j{}^h)\cdot\tilde{\varphi}_U{}^{-1})\theta^j$$

すなわち $\tilde{D}\eta^i$ は任意の点で θ^j の1次結合である．これについて定理 5·1 が成り立つ．まず次の概念を説明しよう．

$GL(n)$ は二つの連結成分，すなわちその行列式の値 $|a_i{}^j(g)|$ が正の部分と負の部分からなる．これらをそれぞれ $GL^+(n), GL^-(n)$ で表わそう．$GL^+(n)$ は $GL(n)$ の不変部分群である．B を $GL^+(n)$ の元に対応する右移動によって類別してできる多様体を $\bar{X}$ で表わそう．$\bar{X}$ は X を二重に覆う多様体で，X が向きをもつときそれは二個の X から成り立ち，そうでないときは X が連結としてあるので $\bar{X}$ **も連結**である．自然な対応を $\tilde{\pi}_1\cdot B\to\bar{X}$, $q_1:\bar{X}\to X$ とすれば $q_1\cdot\tilde{\pi}_1=\tilde{\pi}$ である．$\tilde{\pi}^\#\mathfrak{T}$ から $q_1{}^\#\mathfrak{T}$ への誘導写像を h_1 とする．

定理 5·1 $\widetilde{\pi}^{\#}\mathfrak{T}$ の切断 η が $\widetilde{\pi}_1{}^0=(\widetilde{\pi_1})^0$ による像であるための必要かつ十分な条件は $\widetilde{D}\eta^i$ が $\theta^1,\cdots,\theta^n$ の1次結合であることである．

（証明） 必要なことは上に述べたものと同様にして証明できる．十分なことをいおう．$\eta=\mathfrak{z}_i\eta^i$ として，座標近傍 (U,u) で $v^i=\widetilde{\varphi}_{U,x}{}^*\eta^i$ とおけば，仮定から

$$\widetilde{\varphi}_{U,x}{}^*(d\eta^j+\theta_i{}^j\eta^i)=dv^j+(b_k{}^j da_i{}^k)v^i=0$$

である．よって $a_i{}^jv^i$ は U の点 x と $GL(n)$ の連結成分のみに関係する．したがって，$GL(n)$ 上の函数 ε を $\varepsilon|GL^+(n)=1$, $\varepsilon|GL^-(n)=-1$ と定義すれば，$b=\widetilde{\varphi}_U(x,g)$ に対して $\eta^j(b)=b_i{}^j(g)\xi^i(x,\varepsilon(g))$ なるように表わすことができる．さて $\bar{X}$ の座標近傍 $q_1{}^{-1}(U)$ の座標として U の座標系 u をそのまま使うことにする．$V\ni x$ に対して $b=\widetilde{\varphi}_V(x,g_{VU}(x)g)$ であるから

$$\eta^j(b)=b_i{}^j(g)\xi_U{}^i(x,\varepsilon(g))=b_i{}^j(g_{VU}(x)g)\xi_V{}^i(x,\varepsilon(g_{VU}(x)g))$$

より，関係式

$$\xi_V{}^j(x,\varepsilon(g_{VU}(x))\varepsilon(g))=\frac{\partial v^j}{\partial u^i}\xi_U{}^i(x,\varepsilon(g))$$

が出る．この式は $\xi_U{}^i(x,+1)$, $\xi_U{}^i(x,-1)$ が $\bar{X}$ 上の接ベクトル ξ を定めることを示している．つまりこれは $\widetilde{\pi}_1(b)=\bar{x}$, $\xi_U{}^i(\bar{x})=\xi_U{}^i(x,\varepsilon(g))$ とおいて

$$\xi_V{}^j(\bar{x})=\frac{\partial v^j}{\partial u^i}\xi_U{}^i(\bar{x}),$$

と表わされる．よって $\xi=\dfrac{\partial}{\partial u^i}\xi^i$ とおくと

$$(\widetilde{\pi}_1{}^0\xi)(b)=(h_1|V_b)^{-1}(\xi(\bar{x}))=(h_1|V_b)^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial u^i}(\bar{x})\xi^i(\bar{x})\right)$$
$$=\mathfrak{z}_i(b)b_j{}^i(g)\xi^j(\bar{x})=\mathfrak{z}_i(b)\eta^i(b)$$

であるから $\eta=\widetilde{\pi}_1{}^0\xi$ となる．（終）

系 5·2 任意の型の X の接テンソル・バンドル $\mathfrak{T}_1$ に対して $\widetilde{\pi}^{\#}\mathfrak{T}_1$ の切断が $\mathfrak{T}_1$ の切断，すなわちこの型のテンソル場の $\widetilde{\pi}^0$ による像であるための必要条件は，その成分の共変微分が θ^i のみの1次結合であることである．

証明は上記の定理と同じであるから略す．

問 1 $\tilde{\pi}^{\#}\mathfrak{F}$ の切断 η が $\tilde{\pi}^{0}$ による像であるための必要かつ十分な条件は任意の $g\in GL(n)$ に対して $r(g)^*\eta^j=b_i{}^j(g)^*\eta^i$ であることである．

問 2 $\tilde{\pi}^{\#}\mathfrak{F}$ の切断 η が $\tilde{\pi}^{0}$ による像であるためには $\tilde{D}\eta^i$ が $\theta^1,\cdots,\theta^n$ の1次結合で $GL^-(n)$ の一つの元 g に対して $r(g)^*\eta^j=b_i{}^j(g)\eta^i$ であることである．

5・3 構造式と捩率，曲率

X に擬似接続が与えられていれば，X の任意の接テンソル・バンドル $\mathfrak{F}_1$ に対して作用素

$$\nabla:\Psi^l(\mathfrak{F}_1\otimes\Lambda^{*s}(X))\to\Psi^{l-1}(\mathfrak{F}_1\otimes\Lambda^{*s+1}(X))$$
$$\tilde{\nabla}:\Psi^l(\tilde{\pi}^{\#}\mathfrak{F}_1\otimes\Lambda^{*s}(B))\to\Psi^{l-1}(\tilde{\pi}^{\#}\mathfrak{F}_1\otimes\Lambda^{*s+1}(B))$$

が定義できた．(4・55) と (4・71) から座標近傍 (U,u) においては

$$\left\{\begin{aligned}&\nabla\frac{\partial}{\partial u^i}=\frac{\partial}{\partial u^j}\otimes\omega_i{}^j,\quad \nabla^2\frac{\partial}{\partial u^i}=\frac{\partial}{\partial u^j}\otimes\Omega_i{}^j\\&\Omega_i{}^j=d\omega_i{}^j+\omega_k{}^j\wedge\omega_i{}^k=\frac{1}{2}R_i{}^j{}_{kh}du^k\wedge du^h\\&R_i{}^j{}_{kh}=-R_i{}^j{}_{hk},\quad \omega_i{}^j=\omega_{U}{}^j_i=\Gamma_k{}^j{}_idu^k\end{aligned}\right.\tag{5・19}$$

で，曲率形式 $\Omega_i{}^j$ の係数 $R_i{}^j{}_{kh}$ は $\Gamma_k{}^j{}_i$ を用いて表わせば

$$R_i{}^j{}_{kh}=\frac{\partial\Gamma_h{}^j{}_i}{\partial u^k}-\frac{\partial\Gamma_k{}^j{}_i}{\partial u^h}+\Gamma_k{}^j{}_l\Gamma_h{}^l{}_i-\Gamma_h{}^j{}_l\Gamma_k{}^l{}_i\tag{5・20}$$

であって，X 全体で定義された $\tilde{V}_3{}^1$ 型のある接テンソル場 $\mathfrak{R}$ の局所座標系 $u^1,\cdots,u^n$ に関する自然標構についての成分となっていることは明らかである．このテンソル場 $\mathfrak{R}$ を与えられた**擬似接続の曲率テンソル**という．

(4・67) と (4・68) から $\tilde{\pi}^{\#}\mathfrak{F}$ においては

$$\left\{\begin{aligned}&\tilde{\nabla}\mathfrak{z}_i=\mathfrak{z}_j\otimes\theta_i{}^j,\qquad \tilde{\nabla}^2\mathfrak{z}_i=\mathfrak{z}_j\otimes\Theta_i{}^j\\&\Theta_i{}^j=d\theta_i{}^j+\theta_k{}^j\wedge\theta_i{}^k\end{aligned}\right.\tag{5・21}$$

を得るが，$\Theta_i{}^j$ と $\Omega_i{}^j$ は (4・75) によって

$$\tilde{\varphi}_U{}^*\Theta_i{}^j=b_k{}^j\Omega_h{}^ka_i{}^h,\qquad \tilde{\varphi}_{U,e}{}^*\Theta_i{}^j=\Omega_i{}^j\tag{5・22}$$

なる関係をみたしている．(5・15) と (5・22) を用いると $\Theta_i{}^j$ は

$$\Theta_i{}^j=\frac{1}{2}P_i{}^j{}_{kh}\theta^k\wedge\theta^h,\qquad P_i{}^j{}_{kh}=-P_i{}^j{}_{hk}\tag{5・23}$$

と表わすことができる．$P_i{}^j{}_{hk}$ は $\tilde{\pi}^0\mathfrak{R}$ の標構 $(\mathfrak{z}_1,\cdots,\mathfrak{z}_n)$ に関する成分であることは明らかである．

さて dp の共変微分を考えよう．座標近傍 (U,u) において

$$\nabla dp=\nabla\left(\frac{\partial}{\partial u^j}\otimes du^j\right)=D\frac{\partial}{\partial u^j}\wedge du^j+\frac{\partial}{\partial u^j}\otimes d(du^j)$$

$$=\frac{\partial}{\partial u^j}\otimes(\omega_i^j\wedge du_i)=\frac{\partial}{\partial u^j}\otimes\Omega^j$$

同様に

$$\tilde{\nabla}d\mathfrak{p}=\tilde{\nabla}(\mathfrak{z}_j\otimes\theta^j)=\tilde{D}\mathfrak{z}_j\wedge\theta^j+\mathfrak{z}_j\otimes d\theta^j$$

$$=\mathfrak{z}_j\otimes(d\theta^j+\theta_i^j\wedge\theta^i)=\mathfrak{z}_j\otimes\Theta^j$$

を得る．ところで (5・15) と $b_k^ja_i^k=\delta_i^j$ から

$$\tilde{\varphi}_U{}^*(d\theta^j+\theta_i^j\wedge\theta^i)=d(\tilde{\varphi}_U{}^*\theta^j)+\tilde{\varphi}_U{}^*(\theta_i^j\wedge\theta^i)$$

$$=d(b_k^jdu^k)+b_k^j(da_i^k+\omega_h^ka_i^h)\wedge b_l^idu^l$$

$$=db_k^j\wedge du^k+b_k^jda_i^k\wedge b_h^idu^h+b_k^j\omega_h^k\wedge du^h=b_k^j\omega_h^k\wedge du^h=b_k^j\Omega^k$$

よって

$$\Theta^j=d\theta^j+\theta_i^j\wedge\theta^i=\frac{1}{2}Q_{ik}^j\theta^i\wedge\theta^k,\qquad Q_{ik}^j=-Q_{ki}^j\tag{5・24}$$

と表わすことができる．ところで定義から

$$\Omega^j=\omega_k^j\wedge du^k=\Gamma_{ik}^jdu^i\wedge du^k=\frac{1}{2}S_{ik}^jdu^i\wedge du^k\tag{5・25}$$

$$S_{ik}^j=\Gamma_{ik}^j-\Gamma_{ki}^j$$

の係数 S_{ik}^j は X 全体で定義された $\tilde{V}_2^1$ 型のある接テンソル場 $\mathfrak{S}$ の局所座標系 $u^1,\cdots,u^n$ に関する自然標構についての成分となっていることは明らかである．この $\mathfrak{S}$ を与えられた**擬似接続の捩率テンソル**という．上の計算からただちに

$$Q_{ih}^j=b_l^jS_{km}^la_i^ka_h^m$$

を得るから，Q^j_{ih} は $\tilde{\pi}^0\mathfrak{S}$ の標構 $(\mathfrak{z}_1, \cdots, \mathfrak{z}_n)$ に関する成分である．すなわち

$$(\tilde{\pi}^0\otimes\tilde{\pi}^*)\nabla dp=\tilde{\nabla}d\mathfrak{p} \tag{5·26}$$

擬似接続空間において，方程式 (5·23) と (5·24)

$$\begin{cases} d\theta^j+\theta^j_i\wedge\theta^i=\dfrac{1}{2}Q^j_{ih}\theta^i\wedge\theta^h \\ d\theta^j_i+\theta^j_k\wedge\theta^k_i=\dfrac{1}{2}P^j_{ikh}\theta^k\wedge\theta^h \end{cases} \tag{5·27}$$

は後に示すように本質的な意味をもつものである．これを擬似接続空間の**構造方程式**とよぶ．(5·24) を外微分して (5·21) を用いれば

$$d\Theta^j=d\theta^j_i\wedge\theta^i-\theta^j_i\wedge d\theta^i$$
$$=(\Theta^j_i-\theta^j_k\wedge\theta^k_i)\wedge\theta^i-\theta^j_i(\Theta^i-\theta^i_k\wedge\theta^k)=\Theta^j_i\wedge\theta^i-\theta^j_i\wedge\Theta^i$$

いわゆる **Bianchi の第 1 恒等式**とよばれる

$$\tilde{\nabla}\Theta^j\equiv d\Theta^j+\theta^j_i\wedge\Theta^i=\Theta^j_i\wedge\theta^i \tag{5·28}$$

が導き出される．(5·21) の外微分から同様にして **Bianchi の第 2 恒等式**

$$\tilde{\nabla}\Theta^j_i\equiv d\Theta^j_i+\theta^j_k\wedge\Theta^k_i-\Theta^j_k\wedge\theta^k_i=0 \tag{5·29}$$

を導き出すことができる．後者は $\tilde{\pi}^{\#}\mathfrak{F}^*\otimes\tilde{\pi}^{\#}\mathfrak{F}\otimes\Lambda^2(B)$ の切断としての $\tilde{\pi}^0\mathfrak{R}$ の共変微分が0，いいかえれば与えられた接続についてこれが平行なことを意味し，これは $\mathfrak{R}$ についても同様である．これらに対応する X 上の方程式は (5·28) と (5·29) に $\varphi_{U,e}{}^*$ をかぶせればよいから $\Theta^j, \Theta^j_i, \theta^j, \theta^j_i$ をそれぞれ $\Omega^j, \Omega^j_i, du^j, \omega^j_i$ でおきかえた式が各座標近傍において成り立つ．(5·28) と (5·29) に (5·23), (5·24) を代入して，成分に関する恒等式を出そう．

$$d(Q^j_{hk}\wedge\theta^h\wedge\theta^k)+\theta^j_i\wedge Q^i_{hk}\theta^h\wedge\theta^k-P^j_{ihk}\theta^h\wedge\theta^k\wedge\theta^i$$
$$=dQ^j_{hk}\wedge\theta^h\wedge\theta^k+2Q^j_{lk}\left(\frac{1}{2}Q^l_{ih}\theta^i\wedge\theta^h-\theta^l_h\wedge\theta^h\right)\wedge\theta^k+\theta^j_iQ^i_{hk}\wedge\theta^h\wedge\theta^k$$
$$-P^j_{ihk}\theta^i\wedge\theta^h\wedge\theta^k$$

$$=\widetilde{D}Q^j_{hk}\wedge\theta^h\wedge\theta^k+(Q^j_{lk}Q^l_{ih}-P^j_{ihk})\theta^i\wedge\theta^h\wedge\theta^k$$

定理 5·1 によって $\widetilde{D}Q^j_{hk}=Q^j_{hk|i}\theta^i$ と表わされるから

$$\textstyle\sum'(Q^j_{hk|i}+Q^j_{lk}Q^l_{ih})=P^j_{ihk}+P^j_{hki}+P^j_{kih} \tag{5·28$'$}$$

を得る．ここに左辺の $\sum'$ は i, h, k の巡回置換の和を表わすものとする．同じく

$$d(P^j_{ihk}\theta^h\wedge\theta^k)+\theta^j_l\wedge P^l_{ihk}\theta^h\wedge\theta^k-P^j_{lhk}\theta^h\wedge\theta^k\wedge\theta^l_i$$

$$=(dP^j_{ihk}+\theta^j_lP^l_{ihk}-P^j_{lhk}\theta^l_i)\wedge\theta^h\wedge\theta^k+2P^j_{lmk}\left(\frac{1}{2}Q^m_{lh}\theta^l\wedge\theta^h-\theta^m_h\wedge\theta^h\right)\wedge\theta^k$$

$$=\widetilde{D}P^j_{ihk}\wedge\theta^h\wedge\theta^k+P^j_{imk}Q^m_{lh}\theta^l\wedge\theta^h\wedge\theta^k$$

で $\widetilde{D}P^j_{ihk}=P^j_{ihk|l}\theta^l$ と表わされるから

$$P^j_{ihk|l}+P^j_{ikl|h}+P^j_{ilh|k}+P^j_{imh}Q^m_{kl}+P^j_{imk}Q^m_{lh}+P^j_{iml}Q^m_{hk}=0 \tag{5·29$'$}$$

が成立する．

定理 5·3 B における微分形式系 θ^j_i が X 上に擬似接続を定義するためには B 上で固有な微分形式系 θ^j と共に (5·27) をみたすことが必要である．逆に (5·27) をみたせば $\bar{X}$ 上に擬似接続が定義される．

（証明） 十分なることをいえばよろしい．座標近傍 (U, u) において $\varphi_U{}^*\theta^j=b^j_idu^i$ であるから (5·27) の前半を用いて

$$\{db^j_i+(\widetilde{\varphi}_U{}^*\theta^j_k)b^k_i\}\wedge du^i=du^k \text{ のみの2次の微分形式}$$

したがって $db^j_i+(\widetilde{\varphi}_U{}^*\theta^j_k)b^k_i$ は du^k のみの1次の微分形式である．よって

$$\widetilde{\varphi}_U{}^*\theta^j_i=b^j_k(da^k_i+\omega^k_ha^h_i) \tag{5·30}$$

なる形に表わすことができる．ω^j_i は du^k のみの1次の微分形式を表わす．これを (5·27) の後半に代入すると

$$db^j_k\wedge(da^k_i+\omega^k_ha^h_i)+b^j_k(d\omega^k_ha^h_i-\omega^k_h\wedge da^h_i)$$
$$+b^j_h(da^h_k+\omega^h_la^l_k)\wedge b^k_m(da^m_i+\omega^m_sa^s_i)=b^j_k(d\omega^k_h+\omega^k_l\wedge\omega^l_h)a^i_h$$

が du^k のみの2次の微分形式となるから $d\omega^k_h+\omega^k_l\wedge\omega^l_h$ がそうでなければな

らない．$\omega_h^k=\Gamma_{ih}^k du^i$ と表わして

$$d\omega_h^k+\omega_l^k\wedge\omega_h^l=d\Gamma_{ih}^k\wedge du^i+\Gamma_{jl}^k\Gamma_{ih}^l du^j\wedge du^i$$

であるから $d\Gamma_{ih}^k\wedge du^i$ が du^j の2次の微分形式でなければならない．よって $d\Gamma_{ih}^k$ は du^j の1次の微分形式ということになり，Γ_{ih}^k は U の点と $GL(n)$ の連結成分のみに関係するから定理 5·1 の証明と同じく $\Gamma_{ih}^k(x,\mathcal{E}(g))$ の形である．$b=\tilde{\varphi}_U(x,g),\ \tilde{\pi}_1(b)=\bar{x}$ として $\Gamma_{ih}^k(x,\mathcal{E}(g))=\bar{\Gamma}_{ih}^k(\bar{x})$ と表わせば $\bar{\omega}_h^k=\bar{\Gamma}_{ih}^k du^i$ は $q_1^{-1}(U)$ での微分形式系であって $\bar{x}\in q_1^{-1}(U)\cap q_1^{-1}(V)$ においては (5·30) から (5·11) と同様な関係式

$$\frac{\partial^2 v^k}{\partial u^j\partial u^i}=\frac{\partial v^k}{\partial u^l}\Gamma_{U}{}_{ji}^l(x,\mathcal{E}(g))-\Gamma_{V}{}_{lh}^k(x,\mathcal{E}(g_{VU}(x))\mathcal{E}(g))\frac{\partial v^l}{\partial u^j}\frac{\partial v^h}{\partial u^i}$$

が成立することがいえる．したがって $\bar{\omega}_h^k$ は $\bar{X}$ に擬似接続を定義する．（終）

問 B における微分形式系 θ_i^j が X 上に擬似接続を定義するためには B 上で固有な微分形式系 θ^j と共に (5·27) をみたし，$GL^-(n)$ の一つの元 g に対して $r(g)^*\theta_i^j=a_k^j(g^{-1})\theta_h^k a_i^h(g)$ であることである．

5·4 重さをもつ接テンソル場の共変微分

擬似接続を与えられた多様体 X を考える．重さ W をもつ接テンソルのつくるファイバー・バンドルに対して，与えられた擬似接続から一つの接続が自然に導入できること，つまり重さ W をもつ接テンソル場の共変微分ができることを示そう．

まず接テンソル・バンドル $\Lambda^n(X)$ と $\Lambda^{*n}(X)$ を考える．座標近傍 (U,u) において各々の局所切断

$$\sigma=\frac{\partial}{\partial u^1}\wedge\cdots\wedge\frac{\partial}{\partial u^n},\qquad \sigma^*=du^1\wedge\cdots\wedge du^n$$

はそれぞれのファイバー $\Lambda^n V_x,\ \Lambda^n V_x^*$ において基をなす．他の座標近傍 (V,v) をとり $U\cap V\neq\phi$ とすれば，この接テンソル・バンドルの座標変換は (5·8) によって

$$\begin{aligned} g_{VU}(x)\tilde{e}_1\wedge\cdots\wedge\tilde{e}_n&=\left|\frac{\partial v^j}{\partial u^i}\right|\tilde{e}_1\wedge\cdots\wedge\tilde{e}_n,\\ g_{VU}(x)\tilde{e}^1\wedge\cdots\wedge\tilde{e}^n&=\left|\frac{\partial u^i}{\partial v^j}\right|\tilde{e}^1\wedge\cdots\wedge\tilde{e}^n \end{aligned}\qquad(5\cdot31)$$

ただし，ここに $g_{VU}(x)$ はそれぞれ $\Lambda^n g_{VU}(x)$ と $\Lambda^n(g_{UV}(x))^*$ を表わすことにしよう．この関係は $\Lambda^n(X)$ が重さ -1 のスカラー，$\Lambda^{*n}(X)$ が重さ1のスカラーのつくる接ファイバー・バンドルであることを示す．したがって重さ W のある型の接テンソル・バンドルは W を正整数とすればその型の接テンソル・バンドル $\mathfrak{T}_1$ と $\Lambda^{*n}(X)\otimes\cdots\otimes\Lambda^{*n}(X)$（$W$ 個のテンソル積）とのテンソル積と考えることができる．ところで，与えられた擬似接続による $\Lambda^n(X), \Lambda^{*n}(X)$ での共変微分は

$$D\sigma=D\frac{\partial}{\partial u^1}\wedge\cdots\wedge\frac{\partial}{\partial u^n}=\left(\frac{\partial}{\partial u^1}\wedge\cdots\wedge\frac{\partial}{\partial u^n}\right)\otimes\omega^i_i$$
$$D\sigma^*=Ddu^1\wedge\cdots\wedge du^n=-(du^1\wedge\cdots\wedge du^n)\otimes\omega^i_i \tag{5·32}$$

となる．したがって重さ W のテンソル場，例えば $\tilde{V}^2_1$ 型のテンソルの自然標構 $\dfrac{\partial}{\partial u^1},\cdots,\dfrac{\partial}{\partial u^n}$ に関する成分が T^{ij}_k とすれば (U,u) では $T^{ij}_k=A^{ij}_k\times(1)^W$ とおける．ただし A^{ij}_k は普通の型 $\tilde{V}^2_1$ の接テンソル場の成分で，1は σ^* についての成分を表わすと考える．しかるとき

$$\begin{aligned}DT^{ij}_k&=(DA^{ij}_k)(1)^W+WA^{ij}_k(1)^{W-1}D(1)\\&=dA^{ij}_k+\omega^i_hA^{hj}_k+\omega^j_hA^{ih}_k-A^{ij}_h\omega^h_k-WA^{ij}_k\omega^h_h\end{aligned}$$

であるから，(U,u) において自然標構に関する成分についての公式

$$DT^{ij}_k=dT^{ij}_k+\omega^i_hT^{hj}_k+\omega^j_hT^{ih}_k-T^{ij}_h\omega^h_k-WT^{ij}_k\omega^h_h \tag{5·33}$$

が導き出された．その他の場合にも同様の公式が成り立つ．

5·5 曲線の展開

X の中の C^1 級曲線 C が $f: I\to X$ で与えられているとする．ここに I は t 直線の開区間とする．$\tilde{\pi}^{-1}(C)=B_1$ から B への挿入写像を ι とすれば $\iota^*\theta^j=\pi^j$, $\iota^*\theta^j_i=\pi^j_i$ は X の標構のつくるファイバー・バンドル $\tilde{\mathfrak{F}}$ から写像 f によって誘導される $f^\#\tilde{\mathfrak{F}}$ の微分形式系である．(5·27) により $\iota^*\Theta^j=0$, $\iota^*\Theta^j_i=0$ だから

$$d\pi^j+\pi^j_i\wedge\pi^i=0,\qquad d\pi^j_i+\pi^j_k\wedge\pi^k_i=0 \tag{5·34}$$

である．座標近傍 (U, u) と曲線 C が共通点をもてば，そこでは

$$\pi^j = b^j_i d(u^i \cdot f), \qquad \pi^j_i = b^j_k(a^k_i + (f^* \omega^k_h) a^h_i)$$

となる．

さて n 次元擬似空間 A^n の点 p' を原点とし座標ベクトルを $e_1', \cdots, e_n'$ とする擬似座標系を $(p', e_1', \cdots, e_n')$ で表わすことにする．擬似座標系全体のつくる多様体は $A^n \times GL(n)$ である．$A^n \times GL(n) \times B_1$ における Pfaff 方程式系

$$dp' = e_i' \pi^i, \qquad de_i' = e_j' \pi^j_i \tag{5·35}$$

を考えよう．(5·34) と (5·35) を用いて

$$d(dp' - e_i' \pi^i) = -e_i'(d\pi^i + \pi^i_k \wedge \pi^k) = 0$$

$$d(de_i' - e_j' \pi^j_i) = -e_j'(d\pi^j_i + \pi^j_k \wedge \pi^k_i) = 0$$

が出るから，Frobenius の定理によってこの方程式系 (5·35) は完全積分可能である．ただし，それは $e_1', \cdots, e_n'$ の1次独立性を無視しての話である．上に表わした π^j, π^j_i の形から p', e_i' が B_1 の上の函数として定まることは以下の推論から明らかである．しかも定点 $b_0 \in B_1$ に対して A^n の任意の擬似座標系を対応させれば，これを初期条件として解が定まる．このような任意の解 p', e_i' に対して，$\Delta = |e_1', \cdots, e_n'|$ とおけば

$$d\Delta = \sum |e_1' \cdots de_i' \cdots e_n'| = \Delta \pi^i_i$$

であって，$\tilde{\pi}(b_0) = f(t_0)$ において $\Delta \neq 0$ であるからつねに $\Delta \neq 0$ でなければならない．つまり $e_1', \cdots, e_n'$ は至るところで1次独立である．ところで (5·35) のはじめの式において π^i は dt のみの微分形式ゆえ p' は t のみの函数である．よって p' は A^n の中にパラメーター曲線 $C' : p' = f'(t)$ を定める．解の形をはっきりさせよう．C に沿って一つの標構の切断 $\psi : I \to B$, $\tilde{\pi} \cdot \psi = f$ をとり，これに対応する A^n の1次独立なベクトルの組への写像を ψ' として $\psi'(t) = (v_1(t), \cdots, v_n(t))$ とおいて $\psi^* \theta^j = Q^j dt, \psi^* \theta^j_i = P^j_i dt$ とすれば，仮定から

$$df' = v_j Q^j dt, \qquad dv_i = v_j P^j_i dt \tag{5·36}$$

である．座標近傍 (U, u) において $\psi(t)=\tilde{\varphi}_U(f(t), \sigma(t))$ とおけば

$$Q^j dt=(b_i^j\cdot\sigma)d(u^i\cdot f),\quad P_i^j dt=(b_k^j\cdot\sigma)(d(a_i^k\cdot\sigma)+(f^*\omega_h^k)(a_i^h\cdot\sigma))$$

である．したがって $Q^j dt=(b_k^j\cdot\sigma)a_i^k\pi^i$ であるから

$$df'=(v_j(b_k^j\cdot\sigma)a_i^k)\pi^i$$

と表わされる．これから上式の係数 $v_j(b_k^j\cdot\sigma)a_i^k$ を B_1 上の函数とみて微分すれば

$$\begin{aligned}
d(v_j(b_k^j\cdot\sigma)a_i^k)&=(dv_j)(b_k^j\cdot\sigma)a_i^k+v_jd(b_k^j\cdot\sigma)a_i^k+v_j(b_k^j\cdot\sigma)da_i^k\\
&=v_hP_j^h(b_k^j\cdot\sigma)a_i^k dt+v_jd(b_k^j\cdot\sigma)a_i^k+v_j(b_k^j\cdot\sigma)da_i^k\\
&=(v_j(b_k^j\cdot\sigma)a_l^k)\{b_h^l da_i^h+b_h^l(a_m^h\cdot\sigma)d(b_s^m\cdot\sigma)a_i^s\\
&\qquad\qquad+b_h^l(a_m^h\cdot\sigma)P_s^m(b_u^s\cdot\sigma)a_i^u dt\}\\
&=(v_j(b_k^j\cdot\sigma)a_l^k)\{\pi_i^l-b_h^l(f^*\omega_m^h)a_i^m-b_h^l d(a_m^h\cdot\sigma)(b_s^m\cdot\sigma)a_i^s\\
&\qquad\qquad+b_h^l(d(a_m^h\cdot\sigma)(b_s^m\cdot\sigma)+f^*\omega_s^h)a_i^s\}\\
&=(v_j(b_k^j\cdot\sigma)a_l^k)\pi_i^l
\end{aligned}$$

を得る．これから

$$p'=f(t),\quad \mathrm{e}'_i=v_j(t)b_k^j(\sigma(t))a_i^k(g),\qquad g\in GL(n)$$

が座標近傍 (U, u) における求むる解ということになる．$\psi(t)$ の右移動 $r(g_0)$ による像 $r(g_0)(\psi(t))=\tilde{\varphi}_U(f(t), \sigma(t)g_0)$ には解として，上の式で $g=\sigma(t)g_0$ とおき

$$\mathrm{e}'_i=v_j(t)b_k^j(\sigma(t))a_i^k(\sigma(t)g_0)=v_j(t)\,a_i^j(g_0)$$

が対応する．よって B_1 の点を $r(g)(\psi(t)), g\in GL(n), t\in I$ の形で表わすことにすれば，特殊解 (f', ψ') を用いて解は

$$p'=f'(t),\quad \mathrm{e}'_i=v_j(t)a_i^j(g),\qquad g\in GL(n) \tag{5·37}$$

と表わすことができる．

さて任意の解 p', e'_i と $GL(n)$ の任意の元 g_0 に対して，(4·56) によって

$$d(\mathrm{e}'_j a_i^j(g_0)) = \mathrm{e}'_j \pi_k^j a_i^k(g_0) = \mathrm{e}'_h a_j^h(g_0) r(g_0)^* \pi_i^j$$

また B 上においては容易にわかるように $r(g_0)^*\theta^j = b_h^j(g_0)\theta^h$ であるから

$$dp' = \mathrm{e}'_j a_i^j(g_0) r(g_0)^* \pi^i \qquad (5\cdot38)$$

を得る．よって B_1 上の微分形式系 $r(g_0)^*\pi^j, r(g_0)^*\pi_i^j$ に対応する (5·35) と同じ方程式系の解は (5·35) の解 p', e'_i にそれぞれ平行移動と座標軸に擬似回転をおこなった $p'+a', \mathrm{e}'_j a_i^j(g_0)$ である．

このようにして得られた擬似空間 A^n における擬似座標系の集まりは，B_1 における標構の間の局所的相対関係を保つように，これを実現したものと見なすことができることは (5·17), (5·14) と (5·35) を比較することによって明らかであろう．方程式 (5·35) の形から，一組の解 p', e'_i に対して，A^n の任意の擬似変換をほどこして得られるものはすべて解となることは明らかである．したがって X の中の与えられたパラメーター曲線 C に対して擬似空間 A^n の中にパラメーター曲線 C′ が得られたと考えることができる．この C′ を **C の展開**という．

ところで，(5·35) の後半 $d\mathrm{e}'_i = \mathrm{e}'_j \pi_i^j$ はそれ自身で完全積分可能であって，しかも 4·10 において類似の考察をすでにおこなってある．$v_i(t) = (v_i^1(t), \cdots, v_i^n(t))$ と表わし，$(v_i^j(t))^{-1} = (w_i^j(t))$ とおけば，(4·53)によって曲線 C に沿っての接ベクトル場 $(\mathrm{e}_j\cdot\Psi)w_i^j$ が C に沿って平行であることは $dw_i^j = -P_k^j w_i^k dt$ が成り立つことから明らかである．よって $\rho: I\times GL(n)\to B$ を

$$\mathrm{e}_i(\rho(t, g)) = \mathrm{e}_j(\Psi(t)) w_k^j(t) a_i^k(g)$$

で定義すれば，4·10 末の理論から $\rho_g: I\to B, \rho_g(t) = \rho(t, g)$ は C の上の水平曲線を表わす．これらの曲線族が，与えられた擬似接続と写像 $f: I\to X$ とのみに関係して定まることは同じ節で述べたとおりである．したがって，点 $f(t_1)$ と $f(t_2)$ での接ベクトル $\mathrm{e}_i(\Psi(t_1))w_k^i(t_1)x^k$ と $\mathrm{e}_i(\Psi(t_2))w_k^i(t_2)x^k$ が C を介して重なりあう．よって $x_1^i = w_k^i(t_1)x^k, x_2^i = w_k^i(t_2)x^k$ とおけば

$$v_i^j(t_1)x_1{}^i=v_i^j(t_2)x_2^i \quad \text{または} \quad v_i(t_1)x_1^i=v_i(t_2)x_2^i \tag{5·39}$$

となるから，標構の場としての ψ の点 t_1, t_2 における標構について，それぞれの成分 x_1^i と x_2^i が (5·39) をみたすような接ベクトルが C を介して重なりあうということができる．次に座標の原点については，X の $\tilde{V}_1^1$ 型のテンソル場 dp に対して $(f^0\otimes f^*)dp$ を座標近傍 (U, u) で計算すれば

$$(f^0\otimes f^*)dp=f^0\frac{\partial}{\partial u^i}\otimes f^*du^i=f^0\frac{\partial}{\partial u^i}\otimes d(u^i\cdot f)$$

$$=\left(\frac{\partial}{\partial u^k}\cdot f\right)(a_h^k\cdot\sigma)\otimes(b_i^h\cdot\sigma)d(u^i\cdot f)$$

$$=\left(\frac{\partial}{\partial u^k}\cdot f\right)(a_i^k\cdot\sigma)Q^i\otimes dt=(\mathrm{e}_i\cdot\psi)Q^i\otimes dt$$

となる．他方接ベクトル場 $(\mathrm{e}_j\cdot\psi)w_k^jf'^k$ に対する C に沿っての共変微分は

$$D((\mathrm{e}_j\cdot\psi)w_k^jf'^k)=(\mathrm{e}_j\cdot\psi)w_k^j\otimes df'^k$$

$$=(\mathrm{e}_j\cdot\psi)w_k^j\otimes v_i^kQ^idt=(\mathrm{e}_j\cdot\psi)Q^j\otimes dt$$

であるから，関係式

$$(f^0\otimes f^*)dp=D((\mathrm{e}_j\cdot\psi)w_k^jf'^k)$$

が成り立つ．よって t_1 での接空間と t_2 での接空間との間の擬似変換を位置ベクトルを用いて

$$\mathrm{e}_j(\psi(t_1))w_k^j(t_1)f'^k(t_2) \quad \rightleftarrows \quad \mathrm{e}_j(\psi(t_2))w_k^j(t_2)f'^k(t_1)$$

なる対応をつけ，n 個の1次独立ベクトルの対応は先に述べた方法でつけることができる．この方法で t_1 での接空間 $V_{f(t_1)}$ の点 $\mathrm{e}_i(\psi(t))x_1^i$ が $\mathrm{e}_i(\psi(t_2))x_2^i$ に対応させられたとすれば，この対応は $x_2^j=c_i^jx_1^i+c^j$ の形であるが，上の条件から

$$c_i^j=w_k^j(t_2)v_i^k(t_1), \quad w_k^j(t_2)f'^k(t_1)=c_i^jw_h^i(t_1)f'^h(t_2)+c^j$$

である．よって

$$x_2^j+w_h^j(t_2)f'^h(t_2)=w_k^j(t_2)v_i^k(t_1)x_1^i+w_k^j(t_2)f'^k(t_1)$$

または

$$v_k^j(t_2)x_2^k+f'^j(t_2)=v_k^j(t_1)x_1^i+f'^j(t_1) \tag{5·40}$$

なる x_1^j と x_2^j をもって接空間 $V_{f(t_1)}$ と $V_{f(t_2)}$ の間に擬似対応をつけることができる．この対応が C のみに関係して定まることを示そう．これがベクトルに導入する対応がそうであることはすでに 4·10 で一般に述べてある．(5·36) の解は一般に $b_h^j(g)(f'^h(t)+c^h), b_h^j(g)v_i^h(t)$ であるから，これに対応する w_i^j は $w_h^j(t)a_i^h(g)$ である．よって

$$\mathrm{e}_j(\Psi(t_1))(w_h^j(t_1)a_k^h(g))(b_l^k(g)(f'^l(t_2)+c^l))=\mathrm{e}_j(\Psi(t_1))w_k^j(t_1)(f'^k(t_2)+c^k)$$

$$\mathrm{e}_j(\Psi(t_2))(w_h^j(t_2)a_k^h(g))(b_l^k(g)(f'^l(t_1)+c^l))=\mathrm{e}_j(\Psi(t_2))w_k^j(t_2)(f'^k(t_1)+c^k)$$

となるので，これは上記の擬似変換で対応しあう点となっていることを示している．よって (5·36) の解のとり方に無関係に定まる擬似変換であることがわかった．また上記の対応のつけ方と $(\mathrm{e}_j\cdot\Psi)w_i^j$ が C に沿って平行ベクトルであることから，Ψ の選び方にも関係しないことがいえる．

つぎに，他の点 t_3 をとって部分弧 $t_2\leqq t\leqq t_3$ に対応して同じく

$$\mathrm{e}_j(\Psi(t_2))w_k^j(t_2)f'^k(t_3) \quad\Longleftrightarrow\quad \mathrm{e}_j(\Psi(t_3))w_k^j(t_3)f'^k(t_2)$$

なるように $V_{f(t_2)}$ と $V_{f(t_3)}$ 間の擬似対応をつける．この対応によって

$$v_k^j(t_3)x_3^k+f'^j(t_3)=v_k^j(t_2)x_2^k+f'^j(t_2)$$

なる関係の $\mathrm{e}_j(\Psi(t_2))x_2^j$ と $\mathrm{e}_j(\Psi(t_3))x_3^j$ が対応しあうのであるから，つぎの結論が出る．x_1 と x_2 を結ぶ C^1 級曲線 C に対応して定まる上記の擬似変換を

$$\alpha_{\mathrm{C}}: V_{x_2}\to V_{x_1} \quad (\text{擬似空間として}) \tag{5·41}$$

で表わし，これが導入するベクトルの変換を

$$h_{\mathrm{C}}: V_{x_2}\to V_{x_1} \quad (\text{接ベクトル空間として}) \tag{5·42}$$

とすれば，もちろんこれは C^1 級曲線を有限個つないでできた曲線 C に対しても定義できる．さらに点 x_2 と x_3 を結ぶこの種の曲線 C_1 をとると

$$\alpha_{CC_1}=\alpha_C\cdot\alpha_{C_1}, \qquad \alpha_{C^{-1}}=(\alpha_C)^{-1} \tag{5·43}$$

$$h_{CC_1}=h_C\cdot h_{C_1}, \qquad h_{C^{-1}}=(h_C)^{-1} \tag{5·44}$$

である．α_C, h_C はそれぞれ曲線 C に**付随する擬似変換，線型変換**とよぶ．

X の点 x から出て x にもどる閉曲線で，C^1 級曲線弧をつないでできているもの全体から 4·10 で構成した道の群 $\Omega(x)$ を考えると，(5·41) は α_C が $\Omega(x)$ から，点 x での接空間 V_x における擬似変換群の中への準同型対応を与えることを示している．この対応による群 $\Omega(x)$ の像としてできる n 次元擬似変換群の部分群を与えられた擬似接続空間の点 x における**広義のホロノミー群**という．これを $\mathfrak{H}(x)$ で表わそう．点 x に収縮させることができる閉曲線からできる $\Omega^0(x)$ の像 $\mathfrak{H}^0(x)$ を**狭義のホロノミー群**といい $\mathfrak{H}^0(x)$ で表わす．準同型対応 h_C，すなわち接続をもつ $T(X)$ のホロノミー群をそれぞれ広義または狭義の斉次ホロノミー群といい $H(x), H^0(x)$ で表わそう．各点における $\mathfrak{H}(x), \mathfrak{H}^0(x), H(x), H^0(x)$ が互に同型であることは 4·10 で論じたことにより明らかである．この同型的対応によって等値化された群を，この擬似接続空間のそれぞれの種類の**ホロノミー群**とよぶ．

5·6 特殊な擬似接続空間

擬似接続空間の中で特別なものを幾つか述べよう，捩率テンソルが 0，すなわち捩率形式 Θ^i が 0 であるときには，座標近傍 (U, u) での微分形式 ω_i^j の係数 Γ_{ki}^j は (5·25) によって，添字 k, i について対称で

$$\Gamma_{ki}^j=\Gamma_{ik}^j \tag{5·45}$$

である．このような空間は**対称擬似接続空間**とよばれる．

曲率形式 Θ_i^j が至るところ 0 であるとすれば，Pfaff 方程式系

$$\theta_i^j=0 \tag{5·46}$$

は完全積分可能である．任意の点 $x_0 \in U$ の適当な近傍において定義された $GL(n)$ への写像 σ があって

$$d(a_i^j\cdot\sigma)+\omega_k^j(a_i^k\cdot\sigma)=0$$

ならしめ得ることは(5·12)の形から明らかである．したがって $\omega_i^j=-d(a_k^j\cdot\sigma)(b_i^k\cdot\sigma)=(a_k^j\cdot\sigma)d(b_i^k\cdot\sigma)$ となる．定理 4·6 によれば $\mathfrak{F}$ の局所切断 f を

$$f(x)=\widetilde{\varphi}_U(x,\sigma(x))$$

で定義すれば $f^*\theta_i^j=0$ となるから，前章の意味で $\mathfrak{F}=T(X)$ の接続と見れば局所平坦ということになる．σ の定義域において

$$\widetilde{\varphi}_U{}^*\Theta^j=b_k^j\omega_i^k\wedge du^i=b_k^j(a_h^k\cdot\sigma)d(b_i^h\cdot\sigma)\wedge du^i=b_k^j(a_h^k\cdot\sigma)d((b_i^h\cdot\sigma)du^i)$$

となるから，さらに $\Theta^j=0$ であれば x_0 の適当な近傍で

$$dv^h=(b_i^h\cdot\sigma)du^i$$

となる函数 $v^1,\cdots,v^n$ が存在する．これらは X の局所座標系として採用できることが明らかである．この座標系による接続の微分形式系は (5·10) により

$$\frac{\partial v^j}{\partial u^k}\left(d\frac{\partial u^k}{\partial v^i}+\omega_h^k\frac{\partial u^h}{\partial v^i}\right)$$

となるが，これに上に導かれた関係式を代入すれば

$$=(b_k^j\cdot\sigma)(d(a_i^k\cdot\sigma)+\omega_h^k(a_i^h\cdot\sigma))=0$$

すなわち，各点の近傍で微分形式系 ω_i^j が0となるような局所座標がとれることがいえた．このような性質をもつ擬似接続空間は**局所平坦**であるという．逆にこのような性質をもてば $\Theta^j=0$, $\Theta_i^j=0$ となる．まとめると

定理 5·4 擬似接続空間が局所平坦であるための必要かつ十分な条件は捩率テンソルと曲率テンソルが共に0となることである．

斉次ホロノミー群 H が一つの正値な2次形式 Q によって定義される方程式 $Q=0$ を不変にするとき，与えられた擬似接続は **Weyl 接続**とよばれる．H が一つの正値な2次形式を不変にするとき，**計量接続** または **Euclid 接続**とよばれる，さらに Euclid 接続でしかも対称なものを **Levi-Civita の接続**という．

Weyl 接続をもつ X を考えよう．定点 x_0 での斉次ホロノミー群 $H(x_0)$ によって不変となる接空間 V_{x_0} での2次方程式を $Q=0$ とする．任意の点 x_1

をとって，x_0 と x_1 を C^1 級曲線 C で結び，V_{x_1} での方程式

$$h_C{}^*Q=0$$

を考える．x_0 と x_1 を結ぶ他の曲線 C_1 をとれば

$$h_{C_1}{}^*Q=(h_{C_1}h_C{}^{-1}h_C)^*Q=h_C{}^*(h_{C_1C^{-1}}{}^*Q)$$

であって，$h_{C_1C^{-1}}\in H(x_0)$ だから $(h_{C_1C^{-1}})^*Q=cQ$ の形である．よって

$$h_C{}^*Q=0$$

は V_{x_1} の中で，曲線の選び方に無関係に定まる2次方程式である．つぎに任意の $C_1\in\Omega(x_1)$ に対して

$$h_{C_1}{}^*(h_C{}^*Q)=(h_Ch_{C_1})^*Q=h_C{}^*((h_{CC_1C^{-1}})^*Q)$$

であるから $h_C{}^*Q=0$ は $H(x_1)$ によって不変な2次方程式である．点 x での不変2次方程式は任意の局所座標系 $u^1,\cdots,u^n$ に関する自然標構 $\partial/\partial u^i$ について

$$G_{ij}x^ix^j=0,\qquad G_{ij}=G_{ji}\qquad |G_{ji}|=1 \tag{5·47}$$

なるごとく正値対称行列 G_{ij} を用いて表わされ，この G_{ij} は一意に定まる．これが他の局所座標系 $v^1,\cdots,v^n$ に関する自然標構 $\partial/\partial v^i$ について

$$G'_{ij}x'^ix'^j=0$$

なるように表わされたすれば，$G'_{ij}=cG_{kh}\dfrac{\partial u^k}{\partial v^i}\dfrac{\partial u^h}{\partial v^j}$ の形であって $|G'_{ij}|=1$ であるから

$$G'_{ij}=\left|\frac{\partial u^k}{\partial v^h}\right|^{-2/n}G_{kh}\frac{\partial u^k}{\partial v^i}\frac{\partial u^h}{\partial v^j} \tag{5·48}$$

である．すなわち，重さ $-2/n$ の対称で正値な2次の接テンソル場が定まる．

前節の推論をここに応用しよう．座標近傍 (U,u) 内の曲線 C が $f:I\to X$ で表わされたとし，$\psi:I\to B$ を $\psi=\tilde{\varphi}_{U,e}$ とする．(5·39) によって点 $x_1=f(t_1)$，$x_2=f(t_2)$ との接空間の間の線型対応が $v^j_k(t_1)x^k_1=v^j_k(t_2)x^k_2$ でつくから

$$G_{ij}(x_2)x^i_2x^j_2=G_{ij}(x_2)w^i_l(t_2)v^l_h(t_1)w^j_m(t_2)v^m_k(t_1)x^h_1x^k_1$$

となる．よって

$$G_{ij}(x_2)w^i_l(t_2)v^l_h(t_1)w^j_m(t_2)v^m_k(t_1)=cG_{hk}(x_1),$$

$$c^n=|w^i_k(t_2)|^2|v^j_k(t_1)|^2.$$

$t=t_0$ で $v^j_i(t_0)=\delta^j_i$ なるようにとってあれば，C に沿って

$$|v^m_l|^{2/n}(G_{ij}\cdot f)w^i_h w^j_k=G_{hk}(f(t_0))$$

が成立する．これを t について微分すれば

$$d(G_{ij}\cdot f)w^i_k w^j_h+(G_{ij}\cdot f)(dw^i_k)w^j_h+(G_{ij}\cdot f)w^i_k dw^j_k$$
$$+\frac{2}{n}|v^m_l|^{-1}(G_{ij}\cdot f)w^i_h w^j_k d|v^m_l|=0$$

である．これに (5·36) を代入すれば，ただちに

$$d(G_{ij}\cdot f)-(G_{kj}\cdot f)f^*\omega^k_i-(G_{ik}\cdot f)f^*\omega^k_j+\frac{2}{n}(G_{ij}\cdot f)f^*\omega^k_k=0$$

これが任意の C^1 級曲線に対して成立するのであるから

$$DG_{ij}\equiv dG_{ij}-G_{kj}\omega^k_i-G_{ik}\omega^k_j+\frac{2}{n}G_{ij}\omega^k_k=0 \tag{5·49}$$

が成り立たねばならないい．いかえれば，重さ $-2/n$ の対称テンソル場 G_{ij} は平行でなければならない．逆にこのようなテンソル場が与えられているとき，上記の推論を逆にたどれるので，次の定理が証明せられたわけである．

定理 5·5 擬似接続空間が Weyl 接続であるための必要かつ十分な条件は，平行で重さ $-2/n$ の正値対称な2次の共変テンソル場をもつことである．

Weyl 接続が与えられている空間においては，任意の点 x での二つの0ベクトルでない接ベクトル $\xi=\xi^i\partial/\partial u^i, \eta=\eta^i\partial/\partial u^i$ のなす角を

$$\cos\theta=\frac{G_{ij}\xi^i\eta^j}{\sqrt{G_{ij}\xi^i\xi^j}\sqrt{G_{ij}\eta^i\eta^j}} \tag{5·50}$$

で定義することができる．

上記定理と同様の方法で，つぎの定理も証明される．

定理 5·6 擬似接続空間の接続が Euclid 接続であるための必要かつ十分な

条件は平行で正値対称な2次の共変テンソル場をもつことである．

Euclid 接続をもつ空間においては接ベクトルの長さと曲線の長さを定義することができる．平行で正値対称な2次の共変テンソル場の一つをとる．局所座標 $u^1, \cdots, u^n$ に関する自然標構 $\partial/\partial u^i$ を用いて，それが $g_{ij}du^i \otimes du^j$ と表わされているとする．点 x での接ベクトル $\xi=\xi^i\partial/\partial u^i$ の長さ $|\xi|$ を

$$|\xi|^2=g_{ij}(x)\xi^i\xi^j \tag{5·51}$$

で，また曲線 C, $f: I\to U$ の区間 $[t_1, t_2]$ に対応する部分弧の長さ s を

$$s=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{g_{ij}(f(t))\frac{du^i(f(t))}{dt}\frac{du^j(f(t))}{dt}}\,dt \tag{5·52}$$

で定義することができる．

最後に，与えられた擬似接続が Levi-Civita の接続であると仮定する．平行で正値対称な2次の共変テンソル場の一つをとり，局所座標系 $u^1, \cdots, u^n$ に関するその成分を g_{ij} とし，$\omega_i^j=\Gamma_{ki}^j du^k$ とおけば

$$\begin{cases} \Gamma_{ki}^j=\Gamma_{ik}^j, \\ dg_{ij}-g_{kj}\Gamma_{hi}^k du^h-g_{ik}\Gamma_{hj}^k du^h=0 \end{cases} \tag{5·53}$$

であるから，容易に

$$\Gamma_{ki}^j=\frac{1}{2}g^{jh}\left(\frac{\partial g_{hi}}{\partial u^k}+\frac{\partial g_{kh}}{\partial u^i}-\frac{\partial g_{ki}}{\partial u^h}\right)\equiv\begin{Bmatrix} j \\ ki \end{Bmatrix} \tag{5·54}$$

となることがわかる．$\begin{Bmatrix} j \\ ki \end{Bmatrix}$ は g_{ij} からつくった **Christoffel の 3 添字記号**とよばれる．このような擬似接続による共変微分の概念は Levi-Civita によって最初に導入されたので Liva-Civita の接続とよばれた．多様体内の曲線の長さを (5·52) によって測るような計量 $ds^2=g_{ij}du^i du^j$ をもった空間は **Riemann 空間**とよばれる．Levi-Civita の接続はこの Riemann 空間に自然に導入される Euclid 接続であるということができる．

問 1 Weyl 接続をもつ空間では一つの曲線に沿って平行な二つの接ベクトル場は，各点において等角をなすことを証明せよ．

問 2　Euclid 接続をもつ空間では一つの曲線に沿って平行な接ベクトル場は，各点においで同じ長さをもつことを証明せよ．

5·7 測 地 線

擬似接続空間において，その展開が擬似直線となるような曲線を**測地線**という．測地線 C が $f: I \to X$ で表わされたしよう．前節の理論に従えば C の A^n 内への展開 C′ は (5·35) から導かれた．つまり，$\tilde{\pi}^{-1}(f(I))=B_1$ の上の函数としての p', e_i' が (5·35) により求まり，p' は f にのみ関係し t の函数として求まったので C の展開とよんだのである．座標近傍 (U, u) を C が通るとき，$\psi=\tilde{\varphi}_{U,e}\cdot f$ とおけば

$$\psi^*\theta^j=d(u^j\cdot f), \qquad \psi^*\theta_i^j=f^*\omega_i^j$$

となるので，方程式 (5·36) は

$$df'=v_j d(u^j\cdot f), \qquad dv_i=v_j f^*\omega_i^j$$

となる．C′ が直線であるから df'/dt は定方向をもつ．よって

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{df'}{dt}\right)=v_j\left(\frac{d^2(u^j\cdot f)}{dt^2}+\frac{f^*\omega_i^j}{dt}\frac{d(u^i\cdot f)}{dt}\right)$$
$$=\rho\frac{df'}{dt}=\rho v_j\frac{d(u^j\cdot f)}{dt}$$

であるようなスカラー ρ がある．したがって f' はそこでは微分方程式系

$$\frac{d^2u^j}{dt^2}+\Gamma_{ki}^j\frac{du^k}{dt}\frac{du^i}{dt}=\rho\frac{du^j}{dt}$$

の解である．C の媒介変数 t を適当に選びかえると $d^2f'/dt^2=0$ ならしめ得るから，この測地線は微分方程式系

$$\frac{d^2u^j}{dt}+\Gamma_{ki}^j\frac{du^k}{dt}\frac{du^i}{dt}=0 \tag{5·55}$$

の解であると考えてよろしい．この媒介変数 t は擬似幾何学的意味をもち，1 次元的擬似変換 $\bar{t}=\alpha t+\beta$ を除いて定まることは明らかである．測地線はその擬似パラメーター曲線に沿っての接ベクトル場がそれ自身に沿って平行であるような曲線と考えることができる．これは擬似空間 A^n での直線を特性づける性質と一致しているわけである．

座標近傍 (U, u) において $f(t, x^k, \alpha^k)$ を

$$f^j(0, x^k, \alpha^k)=x^j, \quad \frac{\partial f^j}{\partial t}(0, x^k, \alpha^k)=\alpha^j, \quad f^j=u^j\cdot f \qquad (5\cdot56)$$

であるような測地線を表わすものとする．t に0でない定数をかけてもやはり測地線を表わすから f^j は $f^j(t, x^k, \alpha^k)=F^j(x^k, \alpha^k t)$ の形の函数である．さて $2n$ 変数の函数 $F^j(x^k, y^k)$ については

$$\alpha^j=\left(\frac{\partial f^j}{\partial t}\right)_{t=0}=\left(\frac{\partial F^j}{\partial y^i}\right)_{y=0}\alpha^i$$

が成り立つから

$$\frac{\partial F^j}{\partial y^i}(x^k, 0)=\delta_i^j$$

である．よって定点 x_0 の適当な近傍において座標系 $v^1, \cdots, v^n$ を次の式

$$u^j(x)=F^j(\overset{k}{x_0}, v^k(x)), \qquad \overset{k}{x_0}=u^k(x_0)$$

によって導入することができる．もちろんこの座標系の微分可能度は Γ_{ki}^j のそれである．したがって C^r 級多様体 X の許容座標系とは必ずしもいえないが，この座標系において x_0 を通る測地線は $v^k=\alpha^k t$ のように t の1次式で表わされる．このようにある点を通る測地線が媒介変数の1次式で表わされる座標系を，その点を中心とする**擬似標準座標**とよぶ．

第 6 章　射影接続幾何学

6·1　射影幾何学

$n+1$ 次元座標空間 R^{n+1} の座標を $x^0, \cdots, x^n$ とし，R^{n+1} から原点を除いた集合を関係 $x \sim ax$ $(a \neq 0)$ で類別してできた集合，つまり R^{n+1} の原点を通る直線の集合を n 次元**実射影数空間**とよび P^n で表わす．各類は P^n の点とよばれるが，$R^{n+1} \ni x=(x^0, \cdots, x^n)$ が表わす P^n の点に対して$(x^0, \cdots, x^n)$をその**斉次座標**とよぶ．P^n の１点の斉次座標の中から $\sum_{\alpha=0}^{n} x^\alpha x^\alpha=1$ であるようなものは二つある．すなわち単位球面 $\sum_{\alpha=0}^{n} x^\alpha x^\alpha=1$ とその点を表わす直線との２交点の座標である．したがって P^n は単位球面の対点を同じ点とみなしたものと考えることができる．明らかに P^n は n 次元の解析的多様体である．

さて，ベクトル空間としての R^{n+1} の自己同型対応

$$x'^\beta = a^\beta_\alpha x^\alpha \qquad |a^\beta_\alpha| \neq 0 \tag{6·1}$$

は明らかに上記の同値類を同値類にうつすから P^n の１対１の対応を引き起す．位相の入れ方から，これは P^n の解析的位相写像であって，**射影変換**とよばれる．(6·1) と同じ射影変換を定める同型対応は

$$\rho x'^\beta = a^\beta_\alpha x^\alpha, \qquad |a^\beta_\alpha| \neq 0,\ \rho \neq 0 \tag{6·2}$$

であるから，P^n における射影変換の全体がつくる群 Σ_n は $GL(n+1)$ をその中心（$x'^\alpha = ax^\alpha$, $a \neq 0$ の形の同型対応のつくる不変部分群）を法としてつくった商群と同型である．したがって Σ_n は解析的位相群であるが，さらに (6·2) の形から容易に P^n の上の解析的変換群であることがただちに証明できる． P^n の中の図形の性質で射影変換によって維持されるような性質を研究するのが n 次元射影幾何学である．

R^{n+1} の原点を含む $m+1$ 次元平面の P^n 内での像を **m 次元射影平面**（m 次元部分空間）といい，$m=1,2$ のときにはとくに**射影直線**，**射影平面**とよび，さらに $m=n-1$ のときには**射影超平面**とよぶ．以後これらの術語から射影と

いう語を略することにしよう．P^n の $m+1$ 個の点を含む最低次元の部分空間が m 次元のときにこれらの点は互に**独立**，そうでないときには**従属**であるという．P^n の中の任意の $n+2$ 個の点はつねに互に従属である．P^n の部分集合 M に対して，M の中の任意の $(m+1)$ 個の点が $m \leqq n$ なるかぎりつねに互に独立ならば，M の点は**一般の位置**にあるという．

m 次元部分空間内の $m+2$ 個の点 $p_0, p_1, \cdots, p_m, q$ の中のいずれの $m+1$ 個の点も独立であるとする．しかるとき $p_0, p_1, \cdots, p_m$ を表わす R^{n+1} の点 $x_0, x_1, \cdots, x_m$ を点 $x_0+x_1+\cdots+x_m$ が q を表わすようにとることができる．実際 $p_0, p_1, \cdots, p_m$ を表わす R^{n+1} の点をそれぞれ任意にとって $x_0', \cdots, x_m'$ とする．定義と仮定から，この m 次元射影部分空間を表わす R^{n+1} の $(m+1)$ 次元部分空間の点は $x_0', \cdots, x_m'$ の1次結合として一意に表わされる．したがって q を表わす点 $y \in R^{n+1}$ に対して $\sum_{\alpha=0}^{m} a^\alpha x_\alpha' = y$ となるすべては同時に0でない実数 $a^0, \cdots, a^m$ が一意に定まる．しかも仮定から $a^0, \cdots, a^m$ のいずれも0とならない．$x_\alpha = a^\alpha x_\alpha'$ とおけばよろしい．このような性質をもつ一組の $x_0, x_1, \cdots, x_m$ をとれば，任意のものは $ax_0, \cdots, ax_m$ $(a \neq 0)$ で与えられることは明らかである．さてこの部分空間の任意の点 p に対して，これを表わす $x \in R^{n+1}$ は

$$x = \lambda^0 x_0 + \cdots + \lambda^m x_m \tag{6·3}$$

となるすべてが0とはならない $\lambda^0, \cdots, \lambda^m$ で一意に表わされる．したがって点 p に対して比 $\lambda^0 : \lambda^1 : \cdots : \lambda^m$ が一意に定まる．逆に比 $\lambda^0 : \cdots : \lambda^m \neq 0 : \cdots : 0$ に対してこのような点 p が一意に定まる．このことから m 次元部分空間は P^m であると考えられ，しかもこれらの点 $p_0, \cdots, p_m, q$ が一つの斉次座標系を定義すると見なすことができる．これらの関係は (6·2) によって維持されるから，m 次元部分空間と，それに射影座標を導入する $m+2$ 個の点およびそれによる射影座標は n 次元射影幾何学の概念である．このとき $p_0, \cdots, p_m$ をこの射影座標系の**基礎点**，q をその**単位点**とよぶ．

P_n の二つの射影座標系 $\{p_0, \cdots, p_n ; q\}, \{p_0', \cdots, p_n' ; q'\}$ に対して $\sigma(p_\alpha) = p_\alpha', \alpha=0, \cdots, n, \sigma(q)=q'$ となる $\sigma \in \Sigma_n$ が存在することは容易に証明で

きる．R^{n+1} の座標系 $x^0, x^1, \cdots, x^n$ は各座標軸上の単位点から導かれる P^n の射影座標系に関する斉次座標と考えられる．したがって Σ_n は位相的にはすべての射影座標系 $\{p_0, \cdots, p_n ; q\}$ の集合とみることができる．$\{p_0, \cdots, p_n ; q\}$ を P^n の**標構**とよぶ．

さて射影直線上の四点 q_1, q_2, q_3, q_4 の座標がそれぞれ $(\lambda_i{}^0, \lambda_i{}^1)$, $i=1, 2, 3, 4$ とするとき，q_1, q_2, q_3 がこの直線上において一般の位置にあると仮定して複比 $(q_1, q_2 ; q_3, q_4)$ を計算してみよう．z_i は q_i を表わす R^{n+1} の点とし

$$z_i=\lambda_i^0 x_0+\lambda_i^1 x_1, \qquad i=1, 2, 3, 4$$

とおいて $z_3=\rho_1 z_1+\rho_2 z_2$, $z_4=\mu^0(\rho_1 z_1)+\mu^1(\rho_2 z_2)$ なる定数 $\rho_1, \rho_2, \mu^0, \mu^1$ を求めれば，定義によって $\mu^0 : \mu^1$ が求める複比である．したがって

$$\lambda_3^0=\rho_1\lambda_1^0+\rho_2\lambda_2^0, \qquad \lambda_3^1=\rho_1\lambda_1^1+\rho_2\lambda_2^1$$

$$\lambda_4^0=\mu^0\rho_1\lambda_1^0+\mu^1\rho_2\lambda_2^0, \qquad \lambda_4^1=\mu^0\rho_1\lambda_1^1+\mu^1\rho_2\lambda_2^1$$

となるのでつぎの公式が出る．

$$(q_1, q_2 ; q_3, q_4)=\frac{\begin{vmatrix}\lambda_1^0 & \lambda_1^1\\ \lambda_3^0 & \lambda_3^1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\lambda_2^0 & \lambda_2^1\\ \lambda_3^0 & \lambda_3^1\end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix}\lambda_1^0 & \lambda_1^1\\ \lambda_4^0 & \lambda_4^1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\lambda_2^0 & \lambda_2^1\\ \lambda_4^0 & \lambda_4^1\end{vmatrix}} \tag{6·4}$$

前記の定義により斉次座標を用いて表わせば，P^n の超平面はすべての係数が同時に0でない1次の同次方程式

$$u_\alpha x^\alpha=0 \tag{6·5}$$

で表わされる．$(u_0, u_1, \cdots, u_n)$ はこの超平面の斉次座標と見なすことができるが，実際ベクトル空間としての R^{n+1} の双対空間から得られる射影空間の点の斉次座標である．

超平面 $x^0=0$ を不変にする射影変換は

$$\rho x'^0=a_0^0 x^0, \tag{6·6}$$

$$\rho x'^i=a_0^i x^0+a_j^i x^j, \qquad a_0^0 \neq 0, \ |a_j^i| \neq 0$$

の形の変換である．**無限遠超平面**とよばれるこの超平面に含まれない点 p の斉次座標はつねに $x^0 \neq 0$ であるから

$$y^i = x^i/x^0 \tag{6·7}$$

なる $\{y^1, \cdots, y^n\}$ が一意に定まる．これる点 p の**擬似座標**とよぶ．これを用いれば (6·6) は

$$y'^i = (a^i_j y^j + a^i_0)/a^0_0 \tag{6·8}$$

と表わされ，n 次元の擬似変換となる．いいかえれば，5·1 で述べた擬似変換群は射影変換群の部分群で無限遠超平面 $x^0=0$ を不変にするものと見なすことができる．以下本章では，ギリシヤ文字の添字 α, β, γ 等はつねに $0, 1, \cdots, n$ をうごくものとしよう．

6·2 R^{n+1} をファイバーにもつベクトル・バンドルと接続

n 次元の連結な C^r 級多様体の上のベクトル・バンドルを 4·3 の方法に従って，ファイバー Y を R^{n+1}，バンドルの群 G_0 を

$$a^0_0(g)=1, \quad a^i_0(g)=0, \quad g \in G_0 \subset GL(n+1) \tag{6·9}$$

であるような部分群，つまり R^{n+1} の x^0 座標軸の各点を不変にする $GL(n+1)$ の部分群としてつぎのようにつくる．

ベクトル・バンドル $\mathfrak{F}_0=\{Z, X, \pi, Y, G_0\}$ の座標変換 (2·5) を定義しよう．X の共通部分が空でない二つの座標近傍 (U, u) と (V, v) に対して

$$g_{VU} : U \cap V \to G_0$$

を，($r \geqq 2$ と仮定して) $U \cap V$ から2階1次変換群 L^2_n への写像

$$U \cap V \ni x \to \left(\frac{\partial v^j}{\partial u^i}(x), \frac{\partial^2 v^j}{\partial u^i \partial u^j}(x) \right)$$

と (4·26) を組みあわせ

$$g_{VU} = \begin{pmatrix} 1 & c\dfrac{\partial \log \Delta(v, u)}{\partial u^i} \\ 0 & \dfrac{\partial v^j}{\partial u^i} \end{pmatrix} \tag{6·10}$$

とおく．ただし c は定数，$\Delta(v, u) = |\partial v^j/\partial u^i|$ を表わすものとする．この式

から g_{VU} は $c \neq 0$ のとき C^{r-2} 級，$c=0$ のとき C^{r-1} 級の写像である．これから X の上のベクトル・バンドル $\mathfrak{F}_0$ ができる．これを**射影的接ベクトル・バンドル**とよぼう．$\mathfrak{F}_0$ に対してバンドルの群 G_0 を $GL(n+1)$ でおきかえてできるものを $\mathfrak{F}$ とし，この $\mathfrak{F}$ に第4章の理論を応用しよう．写像の微分可能度等は省略して述べることにする．

$\mathfrak{F}$ に 4·5 の意味での接続が与えられていると仮定する．X の各座標近傍 (U, u) における $\mathfrak{F}_0$ の座標函数を φ_U，$\mathfrak{F}_0$ の連合主ファイバー・バンドル $\tilde{\mathfrak{F}}_0$ の座標函数を $\tilde{\varphi}_U^0$，$\mathfrak{F}$ の連合主ファイバー・バンドル $\tilde{\mathfrak{F}}$ のそれを $\tilde{\varphi}_U$ で表わす．φ_U による $\mathfrak{F}$ の局所切断

$$z_{(U)\alpha} = \varphi_U(x, y_\alpha), \qquad x \in U \tag{6·11}$$

ただし，$y_\alpha = (\delta_\alpha^0, \cdots, \delta_\alpha^n)$，の共変微分は

$$Dz_{(U)\alpha} = z_{(U)\beta} \otimes \omega_{U\alpha}^{\ \beta} \tag{6·12}$$

で与えられる．$U \cap V \neq \phi$ のとき，(4·48) により

$$\omega_{U\alpha}^{\ \beta} = (a_\gamma^\beta \cdot g_{UV})(d(a_\alpha^\gamma \cdot g_{VU}) + \omega_{V\delta}^{\ \gamma}(a_\alpha^\delta \cdot g_{VU}))$$

であるから，これに (6·10) を代入すれば

$$\begin{aligned}
\omega_{U0}^{\ 0} &= \omega_{V0}^{\ 0} + c\, \frac{\partial \log \Delta(u, v)}{\partial v^i}\, \omega_{V0}^{\ i}, \\
\omega_{U0}^{\ j} &= \frac{\partial u^j}{\partial v^i}\, \omega_{V0}^{\ i}, \\
\omega_{U i}^{\ 0} &= \omega_{V h}^{\ 0} \frac{\partial v^h}{\partial u^i} + c\left(d \frac{\partial \log \Delta(v, u)}{\partial u^i} + \omega_{V0}^{\ 0} \frac{\partial \log \Delta(v, u)}{\partial u^i}\right) \\
&\quad + c\, \frac{\partial \log \Delta(u, v)}{\partial v^j}\left(d \frac{\partial v^j}{\partial u^i} + \omega_{V h}^{\ j} \frac{\partial v^h}{\partial u^i} + c\,\omega_{V0}^{\ j} \frac{\partial \log \Delta(v, u)}{\partial u^i}\right), \\
\omega_{U i}^{\ j} &= \frac{\partial u^j}{\partial v^k}\left(d \frac{\partial v^k}{\partial u^i} + \omega_{V h}^{\ k} \frac{\partial v^h}{\partial u^i} + c\,\omega_{V0}^{\ k} \frac{\partial \log \Delta(v, u)}{\partial u^i}\right)
\end{aligned} \tag{6·13}$$

となる．

ここで各座標近傍において $\mathfrak{F}$ の接続が $\omega_{U\alpha}^{\ \beta} = \omega_\alpha^\beta$ に対してつぎの条件

$$\omega_0^1\wedge\omega_0^2\wedge\cdots\wedge\omega_0^n\neq 0 \tag{6·14}$$

をみたすものと仮定しよう．この条件は (6·13) の第2の関係から自然なものであるが，その意味は次節で明らかにされる．

(6·14) を用い，$\mathfrak{F}_0$ の座標函数 φ_U を都合のよいものにとりかえよう．σ を U から G_0 への一つの写像とし $\bar{z}_{(U)\alpha}=z_{(U)\beta}a_\alpha^\beta\cdot\sigma$ とおけば

$$D\bar{z}_{(U)\alpha}=\bar{z}_{(U)\beta}\otimes\bar{\omega}_\alpha^\beta$$

と表わされるが，$\bar{\omega}_\alpha^\beta$ は上記の計算と同じく

$$\bar{\omega}_\alpha^\beta=(b_\gamma^\beta\cdot\sigma)(d(a_\alpha^\gamma\cdot\sigma)+\omega_\delta^\gamma(a_\alpha^\delta\cdot\sigma))$$

であるから，とくに

$$\bar{\omega}_0^0=\omega_0^0+(b_i^0\cdot\sigma)\omega_0^i,\quad \bar{\omega}_0^j=(b_i^j\cdot\sigma)\omega_0^i$$

となる．そこで (6·14) を用いれば

$$\bar{\omega}_0^0=0,\quad \bar{\omega}_0^j=du^j$$

となるように，この写像 σ を一意に定めることができる．この σ を用いて

$$\bar{\varphi}_U(x,y_\alpha)=\varphi_U(x,y_\beta(a_\alpha^\beta\cdot\sigma))$$

とおくと，これらが $\mathfrak{F}_0$ の座標函数を定義することは明らかである．この $\bar{\varphi}_U$ によって定まる $\mathfrak{F}$ の局所標構場 $(\bar{z}_{(U)0},\cdots,\bar{z}_{(U)n})$ を，与えられた接続に関する座標近傍 (U,u) での**自然標構**とよぶ．以下 $\mathfrak{F}_0$ の座標函数 φ_U ははじめから自然標構を定めるようなものをとってあるものと仮定しよう．つまり (U,u) で

$$\omega_0^0=0,\qquad \omega_0^i=du^i \tag{6·15}$$

自然標構を与える座標函数を用いたときの $\mathfrak{F}_0$ の座標変換を調べよう．$U\cap V\neq\phi$ においては明らかに

$$z_{(U)0}=z_{(V)0}$$

である．このことは各座標近傍 U における $z_{(U)0}$ が $\mathfrak{F}_0$ における一つの切断を定めることを示している．これを $p:X\to Z,\ \pi\cdot p=1$ とする．X の任意の点 x での $\mathfrak{F}_0$ のファイバー Y_x はその点 $p(x)$ において X に x で接して

いると考えることができる．この切断 p の共変微分は (U,u) において

$$Dp=z_{(U)i}\otimes du^i \tag{6·16}$$

となっている．したがって $U\cap V$ においては

$$z_{(U)i}=z_{(V)j}\frac{\partial v^j}{\partial u^i}$$

でなければならない．かくて座標変換 g_{VU} は

$$g_{VU}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \dfrac{\partial v^j}{\partial u^i}\end{pmatrix} \tag{6·17}$$

となる．このとき (6·13) は簡単になって

$$\begin{cases}\omega_{U}{}^{j}_{0}=\dfrac{\partial u^j}{\partial v^i}\omega_{V}{}^{i}_{0}, \quad \omega_{U}{}^{0}_{i}=\omega_{V}{}^{0}_{h}\dfrac{\partial v^h}{\partial u^i}\\ \omega_{U}{}^{j}_{i}=\dfrac{\partial u^j}{\partial v^k}\left(d\dfrac{\partial v^k}{\partial u^i}+\omega_{V}{}^{k}_{h}\dfrac{\partial v^h}{\partial u^i}\right)\end{cases} \tag{6·18}$$

となる．以上をまとめると

定理 6·1　n 次元微分可能多様体 X の上に R^{n+1} をファイバーとして座標変換が (6·10) で与えられている射影的ベクトル・バンドル $\mathfrak{F}_0$ があって，$\mathfrak{F}$ に与えられた接続が (6·14) を満足するとき，この接続に関する各座標近傍 (U,u) での自然標構を与えるような座標函数を用いれば，$\omega^0_0=0,\ \omega^i_0=du^i$ であって，$U\cap V\neq\phi$ での座標変換 g_{VU} は (6·17) となる．

$\mathfrak{F}$ に対して (6·14) をみたす接続が一つでもあれば，$\mathfrak{F}$ の座標函数は (6·17) であるとして一般性を失わない．以下では (6·14) をみたす接続のみ考えることにしよう．$\tilde{\mathfrak{F}}=\{B,X,\tilde{\pi},GL(n+1)\}$ に対して 4·6 で定義された微分形式系 θ^β_α を計算する．座標近傍 (U,u) においた θ^β_α は (4·52) によって

$$\tilde{\varphi}_U{}^*\theta^\beta_\alpha=b^\beta_\gamma(da^\gamma_\alpha+\omega^\gamma_\rho a^\rho_\alpha), \qquad \omega^\gamma_\rho=\omega_{U}{}^{\gamma}_{\rho}$$

誘導バンドル $\tilde{\pi}^\#\mathfrak{F}$ の $n+1$ 個の切断 $\mathfrak{z}_\alpha$ を (4·60) で定義すれば，$\tilde{\pi}^\#\mathfrak{F}$ の共変微分 $\tilde{D}$ は

$$\tilde{D}\mathfrak{z}_\alpha=\mathfrak{z}_\beta\otimes\theta^\beta_\alpha \tag{6·19}$$

で定まる．$\widetilde{\mathfrak{F}}_0=\{B_0, X, \widetilde{\pi}_0, G_0\}$ のバンドル空間 B_0 を B の部分多様体と見なして，$\mathfrak{z}_\alpha|B_0=A_\alpha$ とおくことにする．θ_α^β を B_0 に制限して，$\widetilde{\pi}_0{}^\# \mathfrak{F}$ の共変微分を A_α を用いて (6·19) 同様に定義できる．この場合 $\widetilde{\pi}_0{}^{-1}(U)$ において

$$(\widetilde{\varphi}_U^0)^*\theta_0^0=b_j^0\omega_0^j, \qquad (\widetilde{\varphi}_U^0)^*\theta_0^j=b_k^j\omega_0^k \tag{6·20}$$

ただし，右辺の $a_\alpha^\beta, b_\alpha^\beta$ は G_0 の上で考えるものとする．以下 $\widetilde{\varphi}_U{}^*, (\widetilde{\varphi}_U^0)^*$ 等をかぶせるのを略して書くことにする．

$\mathfrak{F}$ に与えられたこの接続の曲率形式は，座標近傍 (U, u) で自然標構を用いれば

$$\begin{aligned}
&\Omega_0^0=\omega_k^0\wedge du^k, \qquad \Omega_i^0=d\omega_i^0+\omega_k^0\wedge\omega_i^k\\
&\Omega_0^j=\omega_k^j\wedge du^k,\\
&\Omega_i^j=d\omega_i^j+\omega_k^j\wedge\omega_i^k+du^j\wedge\omega_i^0
\end{aligned} \tag{6·21}$$

である．自然標構に関する接続の微分形式系 ω_α^β を

$$\omega_\alpha^\beta=\Pi_{k\alpha}^{\ \beta}du^k$$

と表わせば，X の座標変換に対しては (6·18) によって $\Pi_{ki}^{\ j}$ は擬似接続の係数のように，$\Pi_{ki}^{\ 0}$ は接テンソルの成分のように変換されることがわかる．

次に曲線の展開について考えよう．X の中の C^1 級曲線 C が $f: I\to X$ で与えられているとする．$\widetilde{\pi}_0{}^{-1}(\mathrm{C})$ から B の中への挿入写像を ι として $\iota^*\theta_\alpha^\beta=\pi_\alpha^\beta$ とおけば

$$d\pi_\alpha^\beta+\pi_\gamma^\beta\wedge\pi_\alpha^\gamma=0 \tag{6·22}$$

となる．R^{n+1} の1次独立な $n+1$ 個のベクトル $A'_0, \cdots, A'_n$ の組の全体は $GL(n+1)$ と C^ω 級同相である．$GL(n+1)\times\widetilde{\pi}_0{}^{-1}(\mathrm{C})$ の上の Pfaff 方程式系

$$dA'_\alpha=A'_\beta\pi_\alpha^\beta \tag{6·23}$$

は上に述べた関係式 (6·22) によって完全積分可能である．ただし，この意味は単に $(n+1)$ 個のベクトル A'_α と考えてのことであるが，容易にわかるようにある点 $b_0\in\widetilde{\pi}_0{}^{-1}(\mathrm{C})$ で $A'_0, \cdots, A'_n$ が1次独立ならば，至るところで1

次独立となっていることは明らかである．$\pi_0{}^j$ は (6·20) が示しているように dt のみの形式であるから，A'_0 は t のみに関係する．したがって A'_0 は R^{n+1} の中に曲線 C′ を描く．写像 $\psi: I\to B_0, \tilde{\pi}_0\cdot\psi=f$ なるものをとって，(6·23) の解によってこれに対応する $GL(n+1)$ への写像 $\psi': I\to GL(n+1)$ が $A'_\alpha=v_\alpha(t), \alpha=0,\cdots,n$ で与えられたとしよう．$\tilde{\pi}_0{}^{-1}(\mathrm{C})$ の点を $r(g)(\psi(t))$ なるように表わしたとすると，(6·23) の解が

$$A'_\alpha=v_\beta(t)a^\beta_\alpha(g),\quad v_\beta(t)=(v^0_\beta(t),\cdots,v^n_\beta(t)),\qquad g\in G_0 \tag{6·24}$$

の形をすることは前章 5·6 と同じように証明することができる．(6·23) の形から，その解の一つ (6·24) が与えられれば，一般解はこれに $GL(n+1)$ の任意の変換をほどこしたものであることは明らかである．さて

$$(v^\beta_\alpha(t))^{-1}=(w^\beta_\alpha(t))$$

とおけば，$(A_\beta\cdot\psi)w^\beta_\alpha$ が C に沿って平行であることは容易に証明することができる．写像 $\rho: I\times GL(n+1)\to B$ を

$$\mathfrak{z}_\alpha(\rho(t,g))=A_\beta(\psi(t))w^\beta_\gamma(t)a^\gamma_\alpha(g) \tag{6·25}$$

で定義すれば，$\rho_g: I\to B, \rho_g(t)=\rho(g,t)$ は C の上の水平曲線となることは前章および第4章の推論によって明らかである．$\mathfrak{z}_\alpha(\rho(t,g))$ は g を固定すると，C に沿って平行な射影的接ベクトル場になる．これを用いて，この曲線に沿っているファイバー Y_x の間に同型対応が定まる．一般に X の2点 x_1, x_2 を結ぶ有限個の C^1 級曲線弧をつないでできている曲線 C に対応して，このような方法でできる同型対応を

$$h_{\mathrm{C}}: Y_{x_2}\to Y_{x_1} \tag{6·26}$$

で表わそう．C_1 を点 x_2 と他の点 x_3 を結ぶ同種の曲線とすれば

$$h_{\mathrm{CC}_1}=h_{\mathrm{C}}\cdot h_{\mathrm{C}_1},\quad h_{\mathrm{C}^{-1}}=(h_{\mathrm{C}})^{-1} \tag{6·27}$$

が成り立つ．h_{C} を**曲線 C に随伴する変換**という．

6·3 射影接続

(6·10) によって定義された**射影的接ベクトル・バンドル** $\mathfrak{T}_0$ から，つぎのように射影空間 P^n をファイバーとするファイバー・バンドルを定義するこ

とができる．すなわち $Y=R^{n+1}$ から定義される n 次元射影数空間を P^n, $\mathfrak{F}_0$ のファイバー Y_x から定まる射影空間を P_x^n として，座標変換を (6·10) から定まる P^n の射影変換とすれば，バンドルの群が P^n の一点 p_0 を動かさない射影変換のつくる部分群，つまり G_0 から導かれる Σ_n の部分群 Σ_n^0 であるようなファイバー・バンドル $\mathfrak{P}_0$ が定義される．同様に $\mathfrak{F}$ からできるのを $\mathfrak{P}$ で表わそう．この $\mathfrak{P}_0$ を X の**射影的接バンドル**という．

$\mathfrak{F}$ に接続が与えられていて，(6·14) をみたすものと仮定する．X の中の曲線 C に沿っての Y_x の間の同型的対応は P_x^n の間の射影的対応を定めることは明らかである．X の2点 x_1, x_2 を結ぶ前記のような曲線 C に随伴する変換 $h_C: Y_{x_2}\to Y_{x_1}$ は射影変換 $\bar{h}_C: P_{x_2}^n\to P_{x_1}^n$ を定め，これが (6·27) と同じ関係をみたすことも明らかである．このような意味において $\mathfrak{F}$ に与えられた接続は $\mathfrak{P}$ に**射影接続**を定義するという．

$\mathfrak{F}$ に与えられた二つの接続が $\mathfrak{P}$ に同じ射影接続するための条件を調べよう．第二の接続を表わす微分形式には文字の上に横棒をつけて表わすことにする．同じ射影接続を定めるための必要かつ十分な条件は，任意の C^1 級曲線に対するそれぞれの Pfaff 方程式系 (6·23)

$$dA'_\alpha=A'_\beta\pi_\alpha^\beta$$

$$d\bar{A}'_\alpha=\bar{A}'_\beta\bar{\pi}_\alpha^\beta$$

の解が射影的に同等であることである．ところで，そのためには $\bar{A}_\alpha'=\sigma A_\alpha'$ であるような $\tilde{\pi}_0^{-1}(\mathrm{C})$ で至るところ0と異なる函数 σ があるとしてよろしいから，これを上の第2の式に代入すれば

$$d\bar{A}'_\alpha=\sigma dA'_\alpha+A'_\alpha d\sigma=\sigma A'_\beta\pi_\alpha^\beta+A'_\alpha d\sigma=\sigma A'_\beta\bar{\pi}_\alpha^\beta,$$

A'_α の一次独立性によって

$$\bar{\pi}_\alpha^\beta-\pi_\alpha^\beta=\delta_\alpha^\beta d\log\sigma$$

でなければならない．前節で述べたように $A'_0, \bar{A}'_0$ が t のみに関係するから σ も t のみに関係する．したがって曲線が任意であることを考慮すれば，

(4·60) から容易に各座標近傍において

$$\bar{\omega}_\alpha^\beta - \omega_\alpha^\beta = \delta_\alpha^\beta \omega$$

であるような微分形式 ω が存在しなければならない．他方 (6·18) によって，各座標近傍に導かれた ω は X 全体での一つの微分形式を定める．よって $\mathfrak{F}$ の二つの接続が $\mathfrak{P}$ に同じ射影接続を定めるための必要条件は各座標近傍 (U, u) で

$$\bar{\omega}_\alpha^\beta - \omega_\alpha^\beta = \delta_\alpha^\beta \omega \tag{6·28}$$

が成り立つような X の微分形式 ω が存在することである．逆にこのような ω があれば，$\mathfrak{P}$ に同じ射影接続を定義することは明らかである．このような $\mathfrak{F}$ の二つの接続は**射影的に同等**であるという．

さて，射影的に同等な関係を，これらの接続に関するそれぞれの自然標構を用いたときの微分形式系間の関係に書き直してみよう．$\mathfrak{F}_0$ の各座標函数 φ_U が第一の接続に関する自然標構を与えるものとする．しかるとき ω_α^β が (6·15) をみたすから (6·28) は

$$\bar{\omega}_0^0 = \omega, \qquad \bar{\omega}_0^j = \omega_0^j = du^j, \qquad \bar{\omega}_i^0 = \omega_i^0, \qquad \bar{\omega}_i^j = \omega_i^j + \delta_i^j \omega$$

となる．第二の接続に対して自然標構をつくるために，座標近傍 U から G_0 への写像 σ を $\bar{\bar{\omega}}_\alpha^\beta = (b_\gamma^\beta \cdot \sigma (d(a_\alpha^\gamma \cdot \sigma) + \bar{\omega}_\delta^\gamma (a_\alpha^\delta \cdot \sigma))$ が (6·15) をみたすように定めよう．U において

$$\omega = \rho_j du^j \tag{6·29}$$

とおけば

$$\bar{\bar{\omega}}_0^j = (b_k^j \cdot \sigma) \bar{\omega}_0^k, \qquad \bar{\bar{\omega}}_0^0 = \bar{\omega}_0^0 + (b_j^0 \cdot \sigma) \bar{\omega}_0^j$$

であるから

$$a_i^j \cdot \sigma = \delta_i^j, \qquad a_i^0 \cdot \sigma = \rho_i$$

でなければならない．しかるとき

$$\begin{aligned}\bar{\bar{\omega}}_i^0 &= (b_\gamma^0 \cdot \sigma)(d(a_i^\gamma \cdot \sigma) + \bar{\omega}_\delta^\gamma (a_i^\delta \cdot \sigma)) \\ &= d(a_i^0 \cdot \sigma) + \bar{\omega}_0^0 (a_i^0 \cdot \sigma) + \bar{\omega}_i^0 + (b_k^0 \cdot \sigma) \bar{\omega}_i^k + (b_k^0 \cdot \sigma) \bar{\omega}_0^k (a_i^0 \cdot \sigma) \\ &= d\rho_i + \rho_i \omega + \omega_i^0 - \rho_k (\omega_i^k + \delta_i^k \omega) - \rho_k du^k \rho_i\end{aligned}$$

$$=\omega_i^0+d\rho_i-\rho_k\omega_i^k,$$

$$\bar{\bar{\omega}}_i^j=(b_\gamma^j\cdot\sigma)(d(a_i^\gamma\cdot\sigma)+\bar{\omega}_\delta^\gamma(a_i^\delta\cdot\sigma))$$

$$=\bar{\omega}_i^j+\bar{\omega}_0^j(a_i^0\cdot\sigma)=\omega_i^j+\delta_i^j\omega+\rho_i du^j$$

すなわち，$\mathfrak{F}$ に与えられた二つの接続が互に射影的であることを表わしている．関係式 (6·28) は，それぞれの自然標構に関する微分形式系 $\omega_\alpha^\beta, \bar{\omega}_\alpha^\beta$ を用いれば

$$\begin{cases} \bar{\omega}_i^0=\omega_i^0+d\rho_i-\rho_k\omega_i^k-\rho_i\omega \\ \bar{\omega}_i^j=\omega_i^j+\delta_i^j\omega+\rho_i du^j \end{cases} \tag{6·30}$$

となる．

以上の考察から，$\mathfrak{P}$ の射影接続は $\mathfrak{F}$ に与えられた接続から導かれるものばかりとかぎらなくて，一般につぎのように定義される．X の各座標近傍 U において $\mathfrak{F}$ の局所接続 Γ_U が与えられていて，しかも空でない共通部分をもつ二つの座標近傍 U, V に対して Γ_U と Γ_V は $U\cap V$ において射影的に同等であるとき，これらの局所接続の集まり $\{\Gamma_U\}$ は $\mathfrak{P}$ に一つの**射影接続**を定義するという．したがって射影接続に対しては，各座標近傍 U において互に射影的な接続の類が与えられていると考えてよろしい．Γ_U はその類の一つの代表である．座標函数 φ_U に関して Γ_U を定義する微分形式系を $\omega_{U\alpha}^{\ \beta}$ とすれば，(6·28) によって $\omega_{U\alpha}^{\ \beta}-\delta_\alpha^\beta\omega_{U0}^{\ 0}$ が Γ_U の属している接続の射影類に対して定まる共通の微分形式系であることは明らかである．(6·28) で ω を適当にとれば $\bar{\omega}_\alpha^\alpha=0$ となる局所接続 $\bar{\Gamma}_U$ が座標函数 φ_U に関してただ一つ定まる．これを**座標函数 φ_U について正規な接続**とよぶ．$\mathfrak{P}$ に与えられた射影接続に対して，それを定義する $\mathfrak{F}$ の局所接続 Γ_U がそれぞれの座標函数 φ_U について正規な接続をとったとき，これに関して (6·13) に相当する公式を導こう．容易にわかるように $U\cap V\neq\phi$ において

$$\omega_{U\alpha}^{\ \beta}=(b_\gamma^\beta\cdot g_{VU})(d(a_\alpha^\gamma\cdot g_{VU})+\omega_{V\delta}^{\ \gamma}(a_\alpha^\delta\cdot g_{VU}))+\delta_\alpha^\beta c$$

の形をしている．したがって $\alpha=\beta$ とおいて (6·10) を用いれば

$$0=(b_\gamma^\alpha\cdot g_{VU})d(a_\alpha^\gamma\cdot g_{VU})+(n+1)\omega=d\log\Delta(v,u)+(n+1)\omega$$

であるから

$$\omega_{U\alpha}^{\ \beta}=(b_\gamma^\beta\cdot g_{VU})(d(a_\alpha^\gamma\cdot g_{VU})+\omega_{V\delta}^{\ \gamma}(a_\alpha^\delta\cdot g_{VU}))-\frac{1}{n+1}\delta_\alpha^\beta d\log\Delta(v,u)$$

が成り立つ．丁寧に書き並べるとつぎのようになる．

$$\omega_{U0}^{\ 0}=\omega_{V0}^{\ 0}+c\frac{\partial\log\Delta(u,v)}{\partial v^i}\omega_{V0}^{\ i}-\frac{1}{n+1}d\log\Delta(v,u)$$

$$\omega_{U0}^{\ j}=\frac{\partial u^j}{\partial v^i}\omega_{V0}^{\ i}$$

$$\begin{aligned}\omega_{Ui}^{\ 0}=\omega_{Vh}^{\ 0}\frac{\partial v^h}{\partial u^i}&+c\left(d\frac{\partial\log\Delta(v,u)}{\partial u^i}+\omega_{V0}^{\ 0}\frac{\partial\log\Delta(v,u)}{\partial u^i}\right)\\&+c\frac{\partial\log\Delta(u,v)}{\partial v^j}\left(d\frac{\partial v^j}{\partial u^i}+\omega_{Vh}^{\ j}\frac{\partial v^h}{\partial u^i}+c\omega_{V0}^{\ j}\frac{\partial\log\Delta(v,u)}{\partial u^i}\right)\end{aligned}\tag{6·31}$$

$$\begin{aligned}\omega_{Ui}^{\ j}=\frac{\partial u^j}{\partial v^k}&\left(d\frac{\partial v^k}{\partial u^i}+\omega_{Vh}^{\ k}\frac{\partial v^h}{\partial u^i}+c\omega_{V0}^{\ k}\frac{\partial\log\Delta(v,u)}{\partial u^i}\right)\\&-\frac{1}{n+1}\delta_i^j d\log\Delta(v,u)\end{aligned}$$

射影接続に対して，それを定義する $\mathfrak{F}$ の局所接続 Γ_U が座標函数 φ_U について正規であって，φ_U が Γ_U に関する自然標構を定めるとき，これが $\mathfrak{P}$ に誘導する射影的標構場を，座標近傍 (U,u) における与えられた**射影接続の自然標構場**といい，Γ_U を**局所標準接続**とよぶ．与えられた射影接続と各座標近傍 (U,u) に対して，このような Γ_U と φ_U が存在してただ一組定まることは (6·30) から明らかである．自然標構を用いたときの $\mathfrak{F}$ の座標変換は一般に (6·10) の形でなくなる．

曲率形式を考えるために，互に射影的な局所接続 (6·28) の曲率形式の関係を調べよう．(6·28) と (4·71) から

$$\begin{aligned}\overline{\Omega}_\alpha^\beta&=d\overline{\omega}_\alpha^\beta+\overline{\omega}_\gamma^\beta\wedge\overline{\omega}_\alpha^\gamma=d\omega_\alpha^\beta+\delta_\alpha^\beta d\omega+(\omega_\gamma^\beta+\delta_\gamma^\beta\omega)\wedge(\omega_\alpha^\gamma+\delta_\alpha^\gamma\omega)\\&=d\omega_\alpha^\beta+\omega_\gamma^\beta\wedge\omega_\alpha^\gamma+\delta_\alpha^\beta d\omega=\Omega_\alpha^\beta+\delta_\alpha^\beta d\omega,\end{aligned}$$

$$\overline{\Omega}_\alpha^\beta=\Omega_\alpha^\beta+\delta_\alpha^\beta d\omega\tag{6·32}$$

が出る．よって

$$\bar{\Omega}^{\beta}_{\alpha}-\delta^{\beta}_{\alpha}\bar{\Omega}^{0}_{0}=\Omega^{\beta}_{\alpha}-\delta^{\beta}_{\alpha}\Omega^{0}_{0}$$

なる2次の微分形式は射影接続に対応する形式と考えることができる．

$\mathfrak{P}$ に射影接続が与えられていて，それを表わす $\mathfrak{F}$ の局所接続 Γ_U がそれぞれの座標函数 φ_U について正規であるとすれば，共通部分が空でない座標近傍 (U,u) と (V,v) に対して，(6·31) と (6·32) と (4·77) から $U\cap V$ において

$$\Omega_{U}{}^{\beta}_{\alpha}=(b^{\beta}_{\gamma}\cdot g_{VU})\Omega_{V}{}^{\gamma}_{\delta}(a^{\delta}_{\alpha}\cdot g_{VU})$$

である．これに (6·10) を代入すれば，つぎのようになる

$$\begin{aligned}
&\Omega_{U}{}^{j}_{0}=\frac{\partial u^j}{\partial v^i}\Omega_{V}{}^{i}_{0}\\
&\Omega_{U}{}^{0}_{i}=\Omega_{V}{}^{0}_{h}\frac{\partial v^h}{\partial u^i}+c\frac{\partial\log\Delta(u,v)}{\partial v^j}(\Omega_{V}{}^{j}_{h}-\delta^{j}_{h}\Omega_{V}{}^{0}_{0})\frac{\partial v^h}{\partial u^i}\\
&\qquad+c^2\frac{\partial\log\Delta(u,v)}{\partial v^j}\Omega_{V}{}^{j}_{0}\frac{\partial\log\Delta(v,u)}{\partial u^i},\\
&\Omega_{U}{}^{j}_{i}-\delta^{j}_{i}\Omega_{U}{}^{0}_{0}=\frac{\partial u^j}{\partial v^k}(\Omega_{V}{}^{k}_{h}-\delta^{k}_{h}\Omega_{V}{}^{0}_{0})\frac{\partial v^h}{\partial u^i}+c\frac{\partial u^j}{\partial v^k}\Omega_{V}{}^{k}_{0}\frac{\partial\log\Delta(v,u)}{\partial u^i}
\end{aligned}\tag{6·33}$$

第1の関係式は Ω^{i}_{0} が X の接テンソル場を定義することを示している．これを与えられた射影接続の**振率形式**とよび，これによって定まる反変次数1，共変次数2で交代な接テンソルを**振率テンソル**という．

座標変換が (6·17) であるような $\mathfrak{F}$ から定まる X の射影的接バンドル $\mathfrak{P}$ に，一つの射影接続が与えられたような多様体 X とその接続との組を**射影接続空間**という．射影接続空間においては，$\mathfrak{F}_0$ の座標函数 φ_U を適当にとりかえて，$\omega_{U}{}^{j}_{0}=du^j$ ならしめることができる．実際各座標近傍 (U,u) における $\mathfrak{F}$ の局所接続 Γ_U に対して，$\sigma_U: U\to G_0$ を $a^{0}_{i}\cdot\sigma_U=0$ でしかも $(a^{j}_{i}\cdot\sigma_U)du^i=\omega_{U}{}^{j}_{0}$ なるようにとって，$\bar{\varphi}_U(x,y_\alpha)=\varphi_U(x,y_\beta)a^{\beta}_{\alpha}\cdot\sigma_U$ として新しい座標函数 $\bar{\varphi}_U$ を定めれば，$\bar{\varphi}_U$ に関して Γ_U を表わす微分形式系 $\bar{\omega}_{U}{}^{\beta}_{\alpha}$ が $\bar{\omega}_{V}{}^{j}_{0}=du^j$ となることは明らかである．これらに関する座標変換 $\bar{g}_{VU}$ は

$$a_\alpha^\beta\cdot\bar{g}_{VU}=(b_\gamma^\beta\cdot\sigma_V)(a_\delta^\gamma\cdot g_{VU})(a_\alpha^\delta\cdot\sigma_U)$$

であるから，$a_i^0\cdot\bar{g}_{VU}=0$ はすぐ出てくる．さらに (6·31) の第2式がこの場合でも成立するから

$$(a_i^j\cdot\bar{g}_{VU})du^i=(b_k^j\cdot\sigma_V)(a_h^k\cdot g_{VU})(a_i^h\cdot\sigma_U)du^i$$
$$=(b_k^j\cdot\sigma_V)\frac{\partial v^k}{\partial u^h}\omega_{U0}^{\ h}=(b_k^j\cdot\sigma_V)\omega_{V0}^{\ k}=dv^j,$$

よって $\bar{g}_{VU}$ もまた (6·17) である．このような座標函数 $\bar{\varphi}_U$ によって定まる $\mathfrak{F}_0$ の局所標構場から導かれる $\mathfrak{P}_0$ の局所標構場を，与えられた射影接続空間の**準自然標構**という．以下 $\mathfrak{F}_0$ の座標函数 φ_U ははじめからこのようなものをとってあるとして，他の準自然標構を定める座標函数 $\bar{\varphi}_U$ の系で (6·17) をみたすものとの関係をみよう．写像 $\sigma_U: U\to G_0$ を $\bar{\varphi}_U(x, y_\alpha)=\varphi_U(x, y_\beta)a_\alpha^\beta\cdot\sigma_U$ で定義すれば，明らかに $a_i^j\cdot\sigma_U=\delta_i^j$ であるから

$$a_i^0\cdot\bar{g}_{VU}=(b_\gamma^0\cdot\sigma_V)(a_\delta^\gamma\cdot g_{VU})(a_i^\delta\cdot\sigma_U)$$
$$=a_i^0\cdot\sigma_U+(b_h^0\cdot\sigma_V)\frac{\partial v^h}{\partial u^i}=0$$

ゆえに

$$a_i^0\cdot\sigma_U=(a_h^0\cdot\sigma_V)\frac{\partial v^h}{\partial u^i}$$

すなわち，X の共変接ベクトル場が $a_i^0\cdot\sigma_U$ によって定義される．逆も明らかに成立する．まとめると次の定理となる．

定理 6·2 任意の射影接続空間に対して，それを定義する X の射影的接バンドル $\mathfrak{P}$ の射影接続は，X の射影的接ベクトル・バンドル $\mathfrak{F}_0$ の座標函数 φ_U を適当に選べば，座標変換が (6·17) でしかもそれがこの射影接続の準自然標構を定めるようにできる．$\{\varphi_U\}$ がこのような座標函数系であるとし，$\{\bar{\varphi}_U\}$ もまたそうであるとするとき，$\bar{\varphi}_U(x, y_\alpha)=\varphi_U(x, y_\beta)a_\alpha^\beta(\sigma_U(x))$ とおけば $a_i^j\cdot\sigma_U=\delta_i^j$ であって，$a_i^0\cdot\sigma_U$ は X の共変接ベクトル場を定義する．逆も成立する．

この定理によって射影接続空間においては，$\mathfrak{F}_0$ の座標函数 φ_U がこの射影

接続の準自然標構を定めるものとはじめから仮定してよろしい．この射影接続を与える $\mathfrak{F}$ の局所接続 $\Gamma_{U'}$ が，この座標函数 φ_U について正規なものとすれば，(6·31) は

$$\omega_{U0}^{\ 0}=\omega_{V0}^{\ 0}-\frac{1}{n+1}d\log\Delta(v,u),\qquad \omega_{Ui}^{\ 0}=\omega_{Vh}^{\ 0}\frac{\partial v^h}{\partial u^i}$$

$$\omega_{Ui}^{\ j}=\frac{\partial u^j}{\partial v^k}\left(d\frac{\partial v^k}{\partial u_i}+\omega_{Vh}^{\ k}\frac{\partial v^h}{\partial u^i}\right)-\frac{1}{n+1}\delta_i^j d\log\Delta(v,u)\qquad (6\cdot31)'$$

となり，さらに (6·33) は

$$\Omega_{U0}^{\ j}=\frac{\partial u^j}{\partial v^k}\Omega_{V0}^{\ k},\qquad \Omega_{Ui}^{\ 0}=\Omega_{Vh}^{\ 0}\frac{\partial v^h}{\partial u^i}$$

$$\Omega_{Ui}^{\ j}-\delta_i^j\Omega_{U0}^{\ 0}=\frac{\partial u^j}{\partial v^k}(\Omega_{Vh}^{\ k}-\delta_h^k\Omega_{V0}^{\ 0})\frac{\partial v^h}{\partial u^i}\qquad (6\cdot33)'$$

となる．この関係式から Ω_i^0 も $\Omega_i^j-\delta_i^j\Omega_0^0$ も X の接テンソル場を定義することは明らかである．これを射影接続空間の**曲率形式**とよび，それから定義される接テンソルを**曲率テンソル**という．さて

$$\Omega_\alpha^\beta-\delta_\alpha^\beta\Omega_0^0=\frac{1}{2}W_{\alpha hk}^{\ \beta}du^h\wedge du^k,\qquad W_{\alpha hk}^{\ \beta}=-W_{\alpha kh}^{\ \beta}$$

$$\omega_\alpha^\beta-\delta_\alpha^\beta\omega_0^0=\Pi_{k\alpha}^{\ \beta}du^k$$

とおけば，(6·15) によって捩率テンソルと曲率テンソルの成分はそれぞれ

$$W_0{}^j{}_{hk}=\Pi_{hk}^{\ j}-\Pi_{kh}^{\ j}$$

$$W_i{}^0{}_{hk}=\frac{\partial\Pi_{ki}^{\ 0}}{\partial u^h}-\frac{\partial\Pi_{hi}^{\ 0}}{\partial u^k}+\Pi_{hl}^{\ 0}\Pi_{ki}^{\ l}-\Pi_{kl}^{\ 0}\Pi_{hi}^{\ l}\qquad (6\cdot34)$$

$$W_i{}^j{}_{hk}=\frac{\partial\Pi_{ki}^{\ j}}{\partial u^h}-\frac{\partial\Pi_{hi}^{\ j}}{\partial u^k}+\Pi_{hl}^{\ j}\Pi_{ki}^{\ l}-\Pi_{kl}^{\ j}\Pi_{hi}^{\ l}+\delta_h^j\Pi_{ki}^{\ 0}-\delta_k^j\Pi_{hi}^{\ 0}$$
$$-\delta_i^j(\Pi_{hk}^{\ 0}-\Pi_{kh}^{\ 0})$$

と書き表わすことができる．

捩率テンソルが 0 である射影接続空間を**対称射影接続空間**とよび，さらに曲率テンソルが 0 であれば**射影的に局所平坦**であるという．

$\mathfrak{F}$ の二つの局所接続が互に射影的なとき，ω_α^β と $\bar{\omega}_\alpha^\beta$ および Ω_α^β と $\bar{\Omega}_\alpha^\beta$ が

(6·28) と (6·32) をみたすことを見たが，B の上の微分形式 θ_α^β と $\bar{\theta}_\alpha^\beta$ および曲率形式 Θ_α^β と $\bar{\Theta}_\alpha^\beta$ についても，容易に同じ関係式

$$\bar{\theta}_\alpha^\beta=\theta_\alpha^\beta+\delta_\alpha^\beta\tilde{\pi}^*\omega \tag{6·28)'$$

$$\bar{\Theta}_\alpha^\beta=\Theta_\alpha^\beta+\delta_\alpha^\beta d(\tilde{\pi}^*\omega) \tag{6·32)'$$

が成り立つことを証明することができる．したがって $\theta_\alpha^\beta-\delta_\alpha^\beta\theta_0^0$ は B 上の射影的微分形式系であり，$\Theta_\alpha^\beta-\delta_\alpha^\beta\Theta_0^0$ は B 上の射影的な捩率および曲率形式をなしている．しかも

$$\tilde{\varphi}_U{}^*(\Theta_\alpha^\beta-\delta_\alpha^\beta\Theta_0^0)=b_\gamma^\beta(\Omega_\delta^\gamma-a_\delta^\gamma\Omega_0^0)a_\alpha^\delta \tag{6·35}$$

である．$\mathfrak{F}$ の接続に関する Bianchi の恒等式

$$d\Theta_\alpha^\beta-\Theta_\gamma^\beta\wedge\theta_\alpha^\gamma+\theta_\gamma^\beta\wedge\Theta_\alpha^\gamma=0 \tag{6·36}$$

から射影接続空間の **Bianchi の恒等式**

$$\begin{aligned}d(\Theta_\alpha^\beta-\delta_\alpha^\beta\Theta_0^0)-(\Theta_\gamma^\beta-\delta_\gamma^\beta\Theta_0^0)\wedge(\theta_\alpha^\gamma-\delta_\alpha^\gamma\theta_0^0)+(\theta_\gamma^\beta-\delta_\gamma^\beta\theta_0^0)\wedge(\Theta_\alpha^\gamma-\delta_\alpha^\gamma\Theta_0^0)\\+\delta_\alpha^\beta\{\Theta_k^0\wedge\theta_0^k-\theta_k^0\wedge\Theta_0^k\}=0\end{aligned} \tag{6·37}$$

を容易に導き出すことができる．Bianchi の恒等式の応用を述べよう．

定理 6·3　射影的に局所平坦な射影接続空間は局所的に射影空間と同等である．

(証明)　仮定から $\Omega_\alpha^\beta-\delta_\alpha^\beta\Omega_0^0=0$ である．したがって (6·35) によって

$$\Theta_\alpha^\beta=\delta_\alpha^\beta\Theta_0^0$$

である．(6·36) と (6·37) から

$$d\Theta_0^0=\Theta_k^0\wedge\theta_0^k-\theta_k^0\wedge\Theta_0^k=0$$

が出る．$\mathfrak{F}$ の座標函数は $\mathfrak{F}$ の局所接続 Γ_U に関する自然標構を与えるようにとってあるものとすれば，座標近傍 (U,u) に関して (6·15) と $\Omega_0^i=0$ を用いると

$$(\tilde{\varphi}_U^0)^*\Theta_0^0=b_\gamma^0\Omega_\delta^\gamma a_0^\delta=\Omega_0^0=\omega_i^0\wedge du^i$$

すなわち $\tilde{\pi}_0{}^{-1}(U)$ で

$$\Theta_0^0=\tilde{\pi}_0{}^*\Omega_0^0,\qquad d\Omega_0^0=0$$

ところで U の任意の点 x_0 の適当な近傍 U_0 で $\Omega_0^0=-d\omega$ が成り立つ微分形式 ω が存在する．この ω を (6·28) の ω として採用すると $\overline{\Theta}_\alpha^\beta=\Theta_\alpha^\beta+\delta_\alpha^\beta d(\tilde{\pi}^*\omega)=\Theta_\alpha^\beta-\delta_\alpha^\beta\Theta_0^0=0$ となる．よってはじめから，この近傍において $\Theta_\alpha^\beta=0$ が成立すると仮定しよう．しかるとき $GL(n+1)\times\tilde{\pi}_0^{-1}(U_0)$ の上の Pfaff 方程式系

$$dA'_\alpha-A'_\beta\theta_\alpha^\beta=0$$

は完全積分可能である．これの解 $A_\alpha'=f_\alpha(b)$, $b\in\tilde{\pi}_0^{-1}(U_0)$ は (6·24) によって

$$A'_\beta a_\alpha^\beta(g)=f_\alpha(r(g)b), \qquad g\in G_0$$

なる性質をもつから，$A'_0=f_0(b)$ が U_0 の点 $\tilde{\pi}(b)$ を P^n に1対1正則にうつす写像を定義するとしてよろしい．しかも θ_α^β は P^n の座標系を定める R^{n+1} の標構 $(A'_0,\cdots,A'_n)$ の微分を表わす微分形式系と考えることができるから，与えられた射影接続空間は近傍 U_0 においては射影空間の部分と見なすことができる．（終）

定理 6·4 捩率をもたない射影接続空間は $n>2$ で $\Omega_i^j-\delta_i^j\Omega_0^0=0$ ならば局所平坦である．

（証明） 捩率をもたない射影接続空間では Bianchi の恒等式が

$$(\Omega_k^j-\delta_k^j\Omega_0^0)\wedge\omega_0^k=0,$$

$$d(\Omega_i^j-\delta_i^j\Omega_0^0)-(\Omega_k^j-\delta_k^j\Omega_0^0)\wedge(\omega_i^k-\delta_i^k\omega_0^0)+(\omega_k^j-\delta_k^j\omega_0^0)\wedge(\Omega_i^k-\delta_i^k\Omega_0^0)$$
$$+\omega_0^j\wedge\Omega_i^0+\delta_i^j\Omega_k^0\wedge\omega_0^k=0,$$

$$d\Omega_i^0-\Omega_k^0\wedge(\omega_i^k-\delta_i^k\omega_0^0)+\omega_k^0\wedge(\Omega_i^k-\delta_i^k\Omega_0^0)=0$$

となる．さらに $\Omega_i^j-\delta_i^j\Omega_0^0=0$ であると仮定すれば，これらの関係式は

$$\omega_0^j\wedge\Omega_i^0+\delta_i^j\Omega_k^0\wedge\omega_0^k=0,$$

$$d\Omega_i^0-\Omega_k^0\wedge(\omega_i^k-\delta_i^k\omega_0^0)=0$$

となる．はじめの式で $i=j$ とおいて加えれば

$$(n+1)\omega_0^j\wedge\Omega_j^0=0$$

であるから，したがって任意の i と j に対して

$$\omega_0^j \wedge \Omega_i^0 = 0$$

が成り立つ．(6·14) を仮定しているから，$n>2$ のときにはこの関係式から $\Omega_i^0=0$ でなければならないことがただちに導き出せる．したがってすべての α と β に対して $\Omega_\alpha^\beta - \delta_\alpha^\beta \Omega_0^0 = 0$ となるので，与えられた射影接続空間は射影的に局所平坦である．(終)

射影接続空間は局所平坦であって，X が射影空間 P^n と位相同型なとき単に**平坦**であるという．

6·4　曲線の展開，測地線

射影接続空間 X の中の曲線 C が $f: I \to X$ で表わされたとする．C に沿ってこの射影接続を考えるとき，これは $\mathfrak{F}$ に与えられた接続から導かれたものと考えてよろしい．C に関する方程式 (6·23) の解 $A'_\alpha = f_\alpha(b), b \in \tilde{\pi}_0^{-1}(\mathrm{C}) = B_0$ の中の $A'_0 = f_0(b)$ は前節で述べたように t のみに関係するので，A'_0 によって表わされる P^n の点 p'_0 は写像 $f': I \to P^n, p' = f'(t)$ を定義し，f' は P^n の曲線 C′ を定める．この曲線 C′ を与えられた射影接続空間内の**曲線 C の展開**という．(6·23) の一般解はある一組の特殊解に $GL(n+1)$ の任意の変換をほどこして得られるから，C の展開 C′ は P^n 内の曲線として射影変換をほどこせば互にうつれる．したがって射影空間 P^n の中での C の展開という概念が成り立つのである．

X の中の曲線 C は，その展開が射影直線であるとき，この射影接続空間の**測地線**であるという．C′ が射影直線であるための必要かつ十分な条件は $A'_0 = f_0(b)$ が R^{n+1} の原点を通るある平面内にあることであるから，三点

$$A'_0,\quad \frac{d}{dt}A'_0,\quad \frac{d^2}{dt^2}A'_0$$

がつねに一次従属であることが必要であり，また十分でもあることは常微分方程式論の一般論から明らかである．ところでこの射影接続を定義する $\mathfrak{F}$ の接続は (6·15) をみたすものとしてよろしい．C が座標近傍 (U, u) を通るときそこで I から B_0 の中への写像を $b = \tilde{\varphi}_U(f(t), e)$ によって定義すれば，

B_0 内のこの曲線弧に沿って π_α^β は $f^*\omega_\alpha^\beta$ となるから

$$\frac{dA'_0}{dt}=A'_\alpha\frac{f^*\omega_0^\alpha}{dt},\quad \frac{d^2A'_0}{dt^2}=A'_\alpha\left(\frac{df^*\omega_0^\alpha}{dt^2}+\frac{f^*\omega_\beta^\alpha}{dt}\frac{f^*\omega_0^\beta}{dt}\right),$$

したがって C は常微分方程式系

$$\frac{d^2u^j}{dt^2}+\Pi_{ih}^j\frac{du^i}{dt}\frac{du^h}{dt}=\psi\frac{du^j}{dt} \tag{6・38}$$

を満足する．ここに ψ は適当な t の函数である．逆にこのような方程式の解によって与えられる X 内の曲線の展開が射影直線になることも明らかである．ところで p_0' が射影直線上を動くものとすれば，その上に相異なる三点をとって基礎点と単位点にして斉次座標 (λ_0, λ_1) を導入することができる．$\lambda_0/\lambda_1=\sigma$ とおけば，この σ は t の函数であるが曲線 C に対して射影的な意味をもつ媒介変数となる．このような σ を測地線の**射影的媒介変数**とよぶ．もちろん展開曲線上の基礎点と単位点のとり方に関係するから，6・1 で述べた事実によって σ は射影変換

$$\bar{\sigma}=\frac{a\sigma+b}{c\sigma+d}\qquad ad-bc\neq 0$$

を除いて定まる．ところでこのような媒介変数 σ は，t の函数 ρ を適当にとって $\rho A'_0$ が R^{n+1} の直線を動くようにしたとき，$A'_0(t_0)\neq A'_0(t_1)$ なる t_0 と t_1 を選び

$$\rho(t)A'_0(t)=(1-\sigma)\rho(t_0)A'_0(t_0)+\sigma\rho(t_1)A'_0(t_1)$$

で定義することができることは，複比の定義の仕方と σ が射影変換を除いて定まることから明らかである．ω_α^β に f^* をかぶせて書くのを略して計算すれば

$$\frac{d}{dt}\rho A'_0=A'_0\frac{d\rho}{dt}+\rho A'_j\frac{du^j}{dt}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\rho A'_0=A'_0\left(\frac{d^2\rho}{dt^2}+\rho\Pi_{ik}^0\frac{du^i}{dt}\frac{du^k}{dt}\right)$$

$$+\rho A'_j\left(\frac{d^2u^j}{dt^2}+\Pi_{ih}^j\frac{du^i}{dt}\frac{du^h}{dt}+\frac{2}{\rho}\frac{d\rho}{dt}\frac{du^j}{dt}\right)$$

であるから

$$\frac{d^2u^j}{dt^2}+\Pi^j_{ih}\frac{du^i}{dt}\frac{du^h}{dt}+\frac{2}{\rho}\frac{d\rho}{dt}\frac{du^j}{dt}=\left(\frac{d^2\rho}{dt^2}+\rho\Pi^0_{ih}\frac{du^i}{dt}\frac{du^h}{dt}\right)\frac{du^j}{dt}\Big/\frac{d\rho}{dt},$$

したがって

$$\frac{1}{d\rho/dt}\left(\frac{d^2\rho}{dt^2}+\rho\Pi^0_{ih}\frac{du^i}{dt}\frac{du^h}{dt}\right)-\frac{2}{\rho}\frac{d\rho}{dt}=\psi \tag{6·39}$$

をみたすように ρ を定めれば $\rho A'_0$ は R^{n+1} 内の直線上を動く．他方 σ については

$$\frac{d}{d\sigma}\rho A'_0=\frac{dt}{d\sigma}\frac{d}{dt}\rho A'_0,$$

$$\frac{d^2}{d\sigma^2}\rho A'_0=\frac{d^2t}{d\sigma^2}\frac{d}{dt}\rho A'_0+\left(\frac{dt}{d\sigma}\right)^2\frac{d^2}{dt^2}\rho A_0'$$

$$=\left\{\frac{d^2t}{d\sigma^2}+\frac{1}{d\rho/dt}\left(\frac{d^2\rho}{dt^2}+\rho\Pi^0_{ih}\frac{du^i}{dt}\frac{du^h}{dt}\right)\left(\frac{dt}{d\sigma}\right)^2\right\}\frac{d}{dt}\rho A'_0=0$$

であるから (6·39) を用いると

$$\frac{d^2\sigma/dt^2}{d\sigma/dt}-\left(\frac{2}{\rho}\frac{d\rho}{dt}+\psi\right)=0 \tag{6·40}$$

なる関係が成立しなければならない．逆に (6·39) の解 ρ を用いて (6·40) の解として出てくる σ は C の射影的媒介変数となる．ρ を用いないで直接 σ を規定する条件式を導こう．(6·40) を微分すると

$$\frac{d^3\sigma/dt^3}{d\sigma/dt}-\left(\frac{d^2\sigma/dt^2}{d\sigma/dt}\right)^2-\frac{2}{\rho}\frac{d^2\rho}{dt^2}+2\left(\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt}\right)^2-\frac{d\psi}{dt}=0$$

となる．これに (6·39) と (6·40) を代入すると

$$\{\sigma,t\}+2\Pi^0_{ih}\frac{du^i}{dt}\frac{du^h}{dt}+\frac{1}{2}\psi^2-\frac{d\psi}{dt}=0 \tag{6·41}$$

が出る．ここに $\{\sigma,t\}$ は σ の t に関する **Schwarz の微分**とよばれているもので

$$\{\sigma,t\}\equiv\frac{d^3\sigma/dt^3}{d\sigma/dt}-\frac{3}{2}\left(\frac{d^2\sigma/dt^2}{d\sigma/dt}\right)^2$$

がその定義式である．測地線 C の媒介変数を関係式

$$\frac{d^2s}{dt^2}=\psi\frac{ds}{dt}$$

によって t から s にうつせば，(6·38) は

$$\frac{d^2u^j}{ds^2}+\Pi_{ih}^j\frac{du^i}{ds}\frac{du^h}{ds}=0 \tag{6·42}$$

となって，この媒介変数 s から射影的媒介変数 σ をきめる条件式は

$$\{\sigma, s\}+2\Pi_{ih}^0\frac{du^i}{ds}\frac{du^h}{ds}=0 \tag{6·43}$$

となる．常微分方程式論でよく知られているように，(6·41) の一般解 σ はその特殊解に射影変換をほどこして得られるものであって，前に述べた σ の幾何学的な性質と相通じあうものである．

測地線とその射影的媒介変数を用いて射影的標準座標をつぎのように定義することができる．X の任意の点 x_0 を出る測地線を，P^n の中に展開したときの方程式が非斉次座標 ξ^j で

$$\xi^j=\alpha^j\sigma$$

となるようにすることができること，σ が射影的媒介変数であることは以上の推論から明らかである．このようにして P^n の基礎点 p_0 の近傍と X の点 x_0 の近傍の間に1対1の対応をつけることができるから，$\xi^1,\cdots,\xi^n$ を点 x_0 の近傍の座標系と見なすことでができる．これを点 x_0 における**射影的標準座標**とよぶ．X が C^r 級多様体のとき，この座標系は一般に許容座標系でなく，C^{r-2} 級である．以下では X は解析的多様体，射影接続もまた解析的であると仮定しよう．座標近傍 (U, u) の座標系 u が点 x_0 での射影的標準座標とする．$\mathfrak{F}$ の局所接続 Γ_U を (6·15) をみたすようにとっておけば，測地線の方程式は射影的媒介変数 σ を用いるならば

$$\frac{d^2u^j}{d\sigma^2}+\Pi_{ih}^j\frac{du^i}{d\sigma}\frac{du^h}{d\sigma}+\frac{2}{\rho}\frac{d\rho}{d\sigma}\frac{du^j}{d\sigma}=0,$$

$$\frac{d^2\rho}{d\sigma^2}+\rho\Pi_{ih}^0\frac{du^i}{d\sigma}\frac{du^h}{d\sigma}=0$$

である．これを初期条件

$$u^j(0)=0, \qquad \frac{du^j}{d\sigma}(0)=\alpha^j, \qquad \rho(0)=1, \qquad \frac{d\rho}{d\sigma}(0)=0$$

で解いて解 $u^j=\alpha^j\sigma$ が得られるから

$$\Pi^j_{ih}\alpha^i\alpha^h+\frac{2}{\rho}\frac{d\rho}{d\sigma}\alpha^j=0$$

$$\frac{d^2\rho}{d\sigma^2}+\rho\Pi^0_{ih}\alpha^i\alpha^h=0$$

が成立する．逆にこれが成立するような座標 u^j, ρ が標準座標を定めることは明らかである．さて解析的射影接続空間においては捩率テンソルと曲率テンソルが局所的にはこの空間を決定してしまう役割をすることを示そう．x_0 における標準座標 $u^1, \cdots, u^n$ として，$\mathfrak{F}_0$ の座標函数 φ_U を $\mathfrak{F}$ の局所接続 Γ_U について n 個の射影的接ベクトル場 $z_{(U)i}(x)=\varphi_U(x, y_i)$ が x_0 から出る各測地線に沿って平行であるようにとる．しかるとき $\omega^\beta_\alpha=\Pi^\beta_{k\alpha}(u)du^k$ とおけば

$$\Pi^\beta_{ki}(\alpha^h\sigma)\alpha^k=0$$

したがって (6·25) から $A'_i=y_i$ としてよろしい．Γ_U に対して $\omega^0_0=0$ と考えて差支えないから

$$dA_0'=y_i\Pi^i_{k0}(\alpha^h\sigma)\alpha^k d\sigma$$

となる．これを $A'_0=(1, \alpha^j\sigma)$ がみたすから

$$\Pi^i_{k0}(\alpha^h\sigma)\alpha^k=\alpha^i$$

が成立する．これらの関係を曲率テンソルと捩率テンソル

$$W_\alpha{}^\beta{}_{hk}=\frac{\partial\Pi^\beta_{k\alpha}}{\partial u^h}-\frac{\partial\Pi^\beta_{h\alpha}}{\partial u^k}+\Pi^\beta_{h\gamma}\Pi^\gamma_{k\alpha}-\Pi^\beta_{k\gamma}\Pi^\gamma_{h\alpha}-\delta^\beta_\alpha(\Pi^0_{h\gamma}\Pi^\gamma_{k0}-\Pi^0_{k\gamma}\Pi^\gamma_{h0})$$

に結びつけると

$$W_0{}^j{}_{hk}\alpha^k=\frac{\delta^j_h-\Pi^j_{h0}}{\sigma}-\frac{d\Pi^j_{h0}}{d\sigma}+\Pi^j_{hl}\alpha^l,$$

$$W_i{}^j{}_{hk}\alpha^k=-\frac{\Pi^j_{hi}}{\sigma}-\frac{d\Pi^j_{hi}}{d\sigma}-\alpha^j\Pi^0_{hi}-\delta^j_i\Pi^0_{hl}\alpha^l,$$

$$W_i{}^0{}_{hk}\alpha^k=-\frac{\Pi^0_{hi}}{\sigma}-\frac{d\Pi^0_{hi}}{d\sigma}$$

であるから，$\Pi^{\beta}_{k\alpha}$ は微分方程式系

$$\begin{cases} \dfrac{d}{d\sigma}(\Pi^{j}_{h0}\sigma)=\delta^{j}_{h}+(\Pi^{j}_{hl}\sigma)\alpha^{l}-W_{0}{}^{j}{}_{hk}\alpha^{k}\sigma \\ \dfrac{d}{d\sigma}(\Pi^{j}_{hi}\sigma)=-\alpha^{j}(\Pi^{0}_{hi}\sigma)-\delta^{j}_{i}(\Pi^{0}_{hl}\sigma)\alpha^{l}-W_{i}{}^{j}{}_{hk}\alpha^{k}\sigma \\ \dfrac{d}{d\sigma}(\Pi^{0}_{hi}\sigma)=-W_{i}{}^{0}{}_{hk}\alpha^{k}\sigma \end{cases} \tag{6·44}$$

の解として，$W_{\alpha}{}^{\beta}{}_{hk}$ が既知であれば求まることがわかる．

6·5 自 然 標 構

射影接続空間において，$\mathfrak{F}_0$ の座標函数をこの射影接続の自然標構を与えるようにとったときに，接続を与える微分形式系の間の関係を調べよう．

定理 6·2 によって $\mathfrak{F}_0$ の座標函数 φ_U は，与えられた射影接続空間の準自然標構を定めるものとする．射影的接バンドル $\mathfrak{P}$ における射影接続を定める $\mathfrak{F}$ の局所接続 Γ_U が $\mathfrak{F}_0$ の座標函数 φ_U について正規であるとすれば，Γ_U を表わす微分形式系 $\omega_{U\alpha}^{\ \ \beta}$ は

$$\omega_{U0}^{\ \ i}=du^{i},\qquad \omega_{U\alpha}^{\ \ \alpha}=0$$

で，$U\cap V\neq\phi$ では (6·31)′ が成り立つ．U において，この射影接続空間の自然標構を定める座標函数を $\bar{\varphi}_U$，局所標準接続を $\bar{\Gamma}_U$ で表わそう．$\bar{\varphi}_U$ に関して $\bar{\Gamma}_U$ を表わす微分形式系を $\bar{\omega}_{U\alpha}^{\ \ \beta}$ とおき，$\sigma_U:U\to G_0$ を $\bar{\varphi}_U(x,y_\alpha)=\varphi_U(x,y_\beta)(a^{\beta}_{\alpha}\cdot\sigma_U)$ で定義する．微分形式系 $\omega_{U\alpha}^{\ \ \beta}-\delta^{\beta}_{\alpha}\omega_{U0}^{\ \ 0}$ によって与えられる $\mathfrak{F}$ の局所接続について φ_U は自然標構を定めることは，これが (6·15) をみたすことから明らかである．(6·28) から (6·30) を導いた方法を用いると，$a^{j}_{i}\cdot\sigma_U=\delta^{j}_{i}$ でなければならない．$a^{0}_{i}\cdot\sigma_U=\rho_i$ とおけば $\bar{\omega}_{U\alpha}^{\ \ \beta}=\bar{\omega}^{\beta}_{\alpha}$ は

$$\bar{\omega}^{0}_{0}=0,\qquad \bar{\omega}^{0}_{i}=du^{i}$$

$$\bar{\omega}^{0}_{i}=\omega^{0}_{i}+d\rho_i-\rho_k\omega^{k}_{i}-\rho_i(\rho_k du^{k}-\omega^{0}_{0})$$

$$\bar{\omega}^{j}_{i}=\omega^{j}_{i}+\delta^{j}_{i}(\rho_k du^{k}-\omega^{0}_{0})+du^{j}\rho_i$$

である．Γ_U は φ_U について，$\bar{\Gamma}_U$ は $\bar{\varphi}_U$ についてそれぞれ正規であることから

$$\rho_i du^i = \omega_0^0 \tag{6·45}$$

が出て，ρ_i が定まる．これを上に求めた式に代入すると

$$\begin{aligned}\bar{\omega}_i^0 &= \omega_i^0 + d\rho_i - \rho_k \omega_i^k,\\ \bar{\omega}_i^j &= \omega_i^j + du^j \rho_i\end{aligned} \tag{6·46}$$

となる．この座標函数系 $\bar{\varphi}_U$ による $\mathfrak{F}_0$ の座標変換を $\bar{g}_{VU}$ とおけば，$U \cap V \neq \phi$ においては，(6·17) を用いると

$$a_\alpha^\beta \cdot \bar{g}_{VU} = (b_\gamma^\beta \cdot \sigma_V)(a_\delta^\gamma \cdot g_{VU})(a_\alpha^\delta \cdot \sigma_U)$$

$$= (b_0^\beta \cdot \sigma_V)(a_\alpha^0 \cdot \sigma_U) + (b_k^\beta \cdot \sigma_V)\frac{\partial v^k}{\partial u^h}(a_\alpha^h \cdot \sigma_U)$$

であるから，関係式

$$(a_i^0 \cdot \bar{g}_{VU}) du^i = \left(a_i^0 \cdot \sigma_U - (a_k^0 \cdot \sigma_V)\frac{\partial v^k}{\partial u^i}\right) du^i = \omega_{U0}^{\ 0} - \omega_{V0}^{\ 0},$$

$$a_i^j \cdot \bar{g}_{VU} = \frac{\partial v^k}{\partial u^i}$$

が成り立つ．したがって (6·31)′ により座標変換は

$$\bar{g}_{VU} = \begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{1}{n+1}\dfrac{\partial \log \Delta(v, u)}{\partial u^i} \\ 0 & \dfrac{\partial v^j}{\partial u^i} \end{pmatrix} \tag{6·47}$$

となる．これは (6·10) において，定数 c を $-\dfrac{1}{n+1}$ とおいたものにほかならない．ところで，$\bar{\Gamma}_U$ は $\bar{\varphi}_U$ に関して正規であるから，公式 (6·31) を利用することができる．よって $U \cap V \neq \phi$ においては関係式

$$\begin{aligned}\bar{\omega}_{U i}^{\ 0} = &\left\{\bar{\omega}_{V h}^{\ 0} + \frac{1}{n+1}\left(d\frac{\partial \log \Delta(u, v)}{\partial v^h} - \frac{\partial \log \Delta(u, v)}{\partial v^k}\bar{\omega}_{V h}^{\ k}\right)\right\}\frac{\partial v^h}{\partial u^i}\\ &- \frac{1}{(n+1)^2}\frac{\partial \log \Delta(v, u)}{\partial u^i} d \log \Delta(v, u)\end{aligned} \tag{6·48}$$

および

$$\bar{\omega}_{U i}^{\ j} = \frac{\partial u^j}{\partial v^k}\left(d\frac{\partial v^k}{\partial u^i} + \bar{\omega}_{V h}^{\ k}\frac{\partial v^h}{\partial u^i}\right)$$

$$-\frac{1}{n+1}\left(du^j\frac{\partial\log\Delta(v,u)}{\partial u^i}+\delta_i^j d\log\Delta(v,u)\right) \tag{6·49}$$

が成り立つ.

6·6 標準射影接続空間

射影接続空間の測地線は局所座標を用いるとき，媒介変数を適当にとれば微分方程式 (6·42) の解であった．もしこの空間が，接続が与えられた射影的接ベクトル・バンドル $\mathfrak{F}$ から導かれたものと仮定し，各座標近傍における微分形式系 ω_α^β が (6·15) をみたす座標函数をとっておけば，6·2 で述べたように $\omega_\alpha^\beta=\Pi_{k\alpha}^\beta du^k$ の係数 $\Pi_{k\alpha}^\beta$ の中で Π_{ki}^j は擬似接続の係数と同じ変換法則をみたし，Π_{ki}^0 は X の接テンソル場の成分をなしている．他方において接続の係数が Γ_{ki}^j である擬似接続空間の測地線の方程式は

$$\frac{d^2u^j}{ds^2}+\Gamma_{ki}^j\frac{du^k}{ds}\frac{du^i}{ds}=0 \tag{6·50}$$

であるから，これを射影接続空間の測地線と見なすためには $\Gamma_{ki}^j=\Pi_{ki}^j$ とおいて，二次の共変テンソル場 Π_{ki}^0 を任意にとればよろしい．ところで Γ_{ki}^j を測地線を与える係数の系とのみ考えれば

$$\Gamma_{ki}^j=\Gamma_{ik}^j \tag{6·51}$$

すなわち，擬似接続空間が捩率をもたないと考えても一般性を失わないことは明らかである．このように仮定したとき，Π_{ki}^0 を幾何学的に一意に定め得る方法があることを示そう．(5·20) と (6·34) から

$$W_i{}^j{}_{hk}=R_i{}^j{}_{hk}+\delta_h^j\Pi_{ki}^0-\delta_k^j\Pi_{hi}^0-\delta_i^j(\Pi_{hk}^0-\Pi_{kh}^0)$$

と表わすことができる．ところで (6·33)′ が示すように，条件

$$W_i{}^h{}_{hk}=0 \tag{6·52}$$

は射影接続空間において不変な意味をもつことは明らかである．しかるとき $R_{ik}=R_i{}^h{}_{hk}$ とおくと

$$R_{ik}+n\Pi_{ki}^0-\Pi_{ik}^0=0$$

である．これを Π_{ki}^0 に関して解けば，ただちに

$$\Pi^0_{ki}=\frac{-1}{n^2-1}(nR_{ik}+R_{ki}) \tag{6·53}$$

となり，Π^0_{ki} は一意に決定する．このように対称な擬似接続のみから構成される射影接続空間，すなわち捩率テンソルが0で，曲率テンソルが (6·52) をみたす射影接続空間をわれわれは**標準射影接続空間**とよぶ．

標準射影接続空間に対しては (6·53) が成り立つので，これを $W_i{}^j{}_{hk}$ に代入すると

$$W_i{}^j{}_{hk}=R_i{}^j{}_{hk}+\frac{1}{n^2-1}\{\delta^j_k(nR_{ih}+R_{hi})-\delta^j_h(nR_{ik}+R_{ki})\}$$
$$-\frac{1}{n+1}\delta^j_i(R_{hk}-R_{kh})$$

となる．この式はテンソル $W_i{}^j{}_{hk}$ がいわゆる **Weyl の射影テンソル**とよばれているものであることを示している．定理 6·4 を用いると，次の定理がただちに出てくる．

定理 6·5　$n>2$ のとき，対称擬似接続空間から定まる標準射影接続空間が局所平坦であるための必要かつ十分な条件は Weyl の射影テンソルが0となることである．

ここで，歴史的な事実との関連についてふれてみよう．一般に多様体上で (6·51) をみたす微分方程式系 (6·50) によって定義される曲線系を道とよび，道の理論のことを道の幾何学とよんでいる．擬似接続の係数 Γ^i_{kj} を

$$\bar{\Gamma}^i_{kj}=\Gamma^i_{kj}+\delta^i_k\rho_j+\delta^i_j\rho_k \tag{6·54}$$

でおきかえても，同じ道の系が与えられることを H. Weyl が 1921 年に示している．ここに ρ_i は共変ベクトル場の成分を表わす．道を保つという意味で，(6·54) は**擬似接続係数の射影変換**とよばれ，この射影変換で変らない性質を研究する幾何学は**道の射影幾何学**とよばれている．ところで，(6·54) なる関係にある接続係数をもつ擬似接続から定まる標準射影接続空間の微分形式系 $\omega^\beta_\alpha=\Gamma_k{}^\beta_\alpha du^k$, $\bar{\omega}^\beta_\alpha=\bar{\Gamma}_k{}^\beta_\alpha du^k$ はともに (6·15) を満足していて，ω^j_i と $\bar{\omega}^j_i$ は (6·30) の後の関係をみたしている．つぎに (6·54) から曲率テンソルの成分 $R_i{}^j{}_{hk}$

と $R_i{}^j{}_{hk}$ の関係式を求め，さらに $R_{jk}=R_j{}^h{}_{hk}$ と $\bar{R}_{jk}$ の関係式を求めると

$$\bar{R}_{jk}=R_{jk}-(n-1)\left(\frac{\partial\rho_j}{\partial u^k}-\rho_h\Gamma^h_{kj}-\rho_j\rho_k\right)-\left(\frac{\partial\rho_j}{\partial u^k}-\frac{\partial\rho_k}{\partial u^j}\right)$$

が出る．これから容易に

$$n\bar{R}_{jk}+\bar{R}_{kj}=nR_{jk}+R_{kj}-(n^2-1)\left(\frac{\partial\rho_j}{\partial u^k}-\rho_h\Gamma^h_{kj}-\rho_k\rho_j\right)$$

が導き出される．(6·53) を用いると

$$\bar{\Gamma}^0_{kj}=\Gamma^0_{kj}+\frac{\partial\rho_j}{\partial u^k}-\rho_h\Gamma^h_{kj}-\rho_k\rho_j$$

である．これは (6·30) のはじめの関係式が成り立つことを示している．したがって，二つの対称擬似接続空間の接続係数が射影変換でうつれるとき，両者は同じ標準射影接続空間を定めることがわかった．したがって，道の射影幾何学は射影接続空間の測地線の理論に含まれるのである．

T. Y. Thomas は 1925 年に擬似接続係数の射影変換 (6·54) に対して

$$\Pi^i_{kj}=\Gamma^i_{kj}-\frac{1}{n+1}(\delta^i_k\Gamma^h_{jh}+\delta^i_j\Gamma^h_{kh}) \tag{6·55}$$

なる量が変らないことを見つけ，これを**射影接続**とよんで，その幾何学を射影接続幾何学と名づけた．かれはまた

$$*\Gamma^\beta_{\alpha 0}=*\Gamma^\beta_{0\alpha}=-\frac{1}{n+1}\delta^\beta_\alpha,\qquad *\Gamma^j_{ki}=\Pi^j_{ki}$$

$$*\Gamma^0_{kj}=-\frac{n+1}{n-1}\Pi_{kj}, \tag{6·56}$$

$$\Pi_{kj}=-\frac{1}{n+1}(nR_{jk}+R_{kj})-\frac{n-1}{n+1}\left(\frac{\partial\Gamma^l_{jl}}{\partial u^k}-\Gamma^l_{hl}\Gamma^h_{kj}+\frac{1}{n+1}\Gamma^l_{kl}\Gamma^h_{jh}\right)$$

なる量が，変数変換

$$v^0=u^0+\log\Delta(v,u),\qquad v^i=v^i(u^k) \tag{6·57}$$

のもとで，$(n+1)$ 次元の擬似接続の係数と同じように変換されることに着目して，その射影接続幾何学を構成した．これを前節の理論から眺めてみよう．擬似接続空間から定まる標準射影接続空間は，射影的接ベクトル・バンドル $\mathfrak{F}$ の接続から定義される射影接続をもっているから，各座標近傍 (U,u) におい

て，この接続を表わす微分形式系は本節のはじめに述べたものとする．$\mathfrak{F}$ の接続と U で射影的に同等であり，$\mathfrak{F}_0$ の座標函数 φ_U に関して正規な局所接続を表わす微分形式系 ω_α^β はすぐわかるように

$$\omega_0^0=-\frac{1}{n+1}\Gamma_{kl}^l du^k,\qquad \omega_i^0=-\frac{1}{n^2-1}(nR_{ik}+R_{ki})du^k,$$

$$\omega_0^j=du^j,\qquad \omega_i^j=\left(\Gamma_{ki}^j-\frac{1}{n+1}\delta_i^j\Gamma_{kl}^l\right)du^k$$

となる．したがって，この座標近傍におけるこの標準射影接続空間の自然標構に関して標準局所接続を表わす微分形式系 $\bar{\omega}_\alpha^\beta=\Pi_{k\alpha}^\beta du^k$ は (6·46) によって

$$\Pi_{i0}^0=0,\qquad \Pi_{k0}^j=\delta_k^j,$$

$$\Pi_{ki}^j=\Gamma_{ki}^j-\frac{1}{n+1}(\delta_k^j\Gamma_{ih}^h+\delta_i^j\Gamma_{kh}^h)\tag{6·58}$$

$$\Pi_{ki}^0=-\frac{1}{n^2-1}(nR_{ik}+R_{ki})-\frac{1}{n+1}\left(\frac{\partial\Gamma_{il}^l}{\partial u^k}-\Gamma_{hl}^l\Gamma_{ki}^h+\frac{1}{n+1}\Gamma_{kl}^l\Gamma_{ih}^h\right)$$

となる．この標準射影接続空間の自然標構を与える $\mathfrak{F}_0$ の座標函数を $\bar{\varphi}_U$ とおいて，これから

$$\hat{\varphi}_U(x, y_i)=-(n+1)\bar{\varphi}_U(x, y_i),\qquad \hat{\varphi}_U(x, y_0)=\bar{\varphi}_U(x, y_0)$$

なる座標函数 $\hat{\varphi}_U$ にとりかえたとき，この標準局所接続を表わす微分形式系を $\hat{\omega}_\alpha^\beta=\hat{\Pi}_{k\alpha}^\beta du^k$ とおけば，(6·56) と (6·58) から容易に

$$*\Gamma_{k\alpha}^\beta=\hat{\Pi}_{k\alpha}^\beta\tag{6·59}$$

であることが出てくる．さらに，この座標函数系による $\mathfrak{F}_0$ の座標変換 $\hat{g}_{VU}$ は $U\cap V$ において

$$\hat{g}_{VU}=\begin{pmatrix}1 & \dfrac{\partial\log\Delta(v, u)}{\partial u^i}\\ 0 & \dfrac{\partial v^j}{\partial u^i}\end{pmatrix}\tag{6·60}$$

となるから，(6·56) が変換 (6·57) に関して擬似接続の係数のように変換されることがわかり，また (6·56) が $\mathfrak{F}_0$ における局所接続の係数として，何を表わしているかもわかったのである．

6·7　ホロノミー群

射影接続空間のホロノミー群に関する性質について少し調べよう．

まず，一点 x_0 におけるホロノミー群がそこでの接射影空間 $P^n_{x_0}$ 内の一超平面を不変にし，しかも接点がこの超平面に含まれないものとする．前章の推論と同じように，この射影接続空間の接続に関して互に重なりあう各接射影空間 P^n_x 内の超平面 σ_x の場が定まる．もちろん，P^n_x の接点は σ_x には含まれない．$\mathfrak{F}_0$ の座標函数 φ_U を，この空間の射影接続について準自然標構を定めるものをとっておけば，座標近傍 (U, u) において超平面 σ_x はこの φ_U に関して方程式

$$y^0+\xi_i y^i=0 \tag{6·61}$$

で与えられるとしてよろしい．他の座標近傍 (V, v)，$U\cap V\ni x$ において，この σ_x が φ_V に関しては

$$z^0+\eta_i z^i=0$$

で与えられているとすると，(6·17) によって

$$z^0=y^0, \qquad z^i=\frac{\partial v^i}{\partial u^k}y^k$$

であるとしてよろしいらか

$$\xi_i=\eta_k\frac{\partial v^k}{\partial u^i}$$

でなければならない．したがって ξ_i は X のある共変接ベクトル場の自然標構 $\partial/\partial u^i$ に関する成分を表わす．定理 6·2 により，準自然標構を選びかえて σ_x の方程式が

$$y^0=0 \tag{6·61$'$}$$

で与えられるようにできる．つまり σ_x はP^n_x 内のこの斉次座標系についての無限遠超平面となるのである．しかるとき，仮定から $dy^0+\overset{0}{\omega}_\alpha y^\alpha=\overset{0}{\omega}_i y^i$ が y^i のいかんにかかわらず 0 でなければならない．したがって条件

$$\overset{0}{\omega}_i=0 \tag{6·62}$$

が出てくる．この射影接続を表わす $\mathfrak{F}$ の局所接続として $\overset{0}{\omega}_0=0$ なるものをと

れば，残りの微分形式系 $\omega_0^j=du^j$, ω_i^j が X に擬似接続を定めることを，(6·31)′ から容易に示すことができる．逆に任意の擬似接続空間からこのような射影接続空間を定めることができる．しかも上記のように P_x^n において σ_x を無限遠超平面と見れば擬似接続空間の接空間 A_x^n はホロノミー群が一超平面を不変にする射影接続空間の接射影空間 P_x^n の有限部分と見ることができるわけである．

次に，一点 x_0 におけるホロノミー群がそこでの接射影空間 $P_{x_0}^n$ 内の一つの二次超曲面を不変にし，接点はその上にのってないと仮定しよう．しかるとき，この射影接続に関して互に重なりあう各接射影空間 P_x^n 内の二次超曲面 Q_x^{n-1} の場が定まる．準自然標構に関して Q_x^{n-1} が

$$y^0y^0+\xi_iy^iy^0+h_{ij}y^iy^j=0, \qquad h_{ij}=h_{ji} \tag{6·63}$$

で与えられるとする．(6·17) によって，この式の係数 ξ_i は X のある共変接ベクトル場の自然標構に関する成分をなす．したがって，前記の場合と同じく準自然標構を選びかえて Q_x^{n-1} の方程式が

$$y^0y^0+g_{ij}y^iy^j=0 \tag{6·63$'$}$$

となるようにできる．この式の係数 g_{ij} は X の2次の対称共変テンソル場の成分をなしている．仮定から

$$y^0dy^0+g_{ij}y^idy^j+\frac{dg_{ij}}{2}y^iy^j=0$$

に

$$dy^\alpha=-\omega_\beta^\alpha y^\beta+\omega y^\alpha$$

を代入することによって出てくる

$$-y^0\omega_\beta^0y^\beta-g_{ij}y^i\omega_\beta^jy^\beta+\omega(y^0y^0+g_{ij}y^iy^j)+y^iy^j\frac{dg_{ij}}{2}$$

$$=-y^0y^0\omega_0^0-y^0y^i(g_{ij}\omega_0^j+\omega_i^0)-y^iy^jg_{ik}\omega_j^k+y^iy^j\frac{dg_{ij}}{2}$$

が，(6·63)′ をみたすような y^α に対してつねに0でなければならない．したがって

$$\omega_i^0 = -g_{ij}du^j, \qquad dg_{ij} - g_{ik}\omega_j^k - g_{jk}\omega_i^k = -2\, g_{ij}\omega_0^0 \qquad (6\cdot 64)$$

でなければならない．この射影接続を定める $\mathfrak{F}$ の局所接続を $\omega_0^0 = 0$ であるものをとることにする．しかるとき，もし g_{ij} が正値または負値のとき ω_i^j は 5·7 に述べたことによって Euclid 接続を定義する．ところで，Q_x^{n-1} は g_{ij} が正値のときには接射影空間 P_x^n に楕円的非ユークリッド空間を定義し，g_{ij} が負値のときには Q_x^{n-1} の内部に双曲線的非ユークリッド空間を定義する．したがって，この場合には，ω_α^β は n 次元非ユークッド空間を接空間とする X の上のファイバー・バンドルの**非ユークリッド的接続**を表わす微分形式系であると考えることができる．さらに，この空間が標準射影接続空間であると仮定すれば，(6·64) の第２式から

$$\omega_i^j = \left\{ \begin{matrix} j \\ ki \end{matrix} \right\} du^k$$

となり，(6·53) と (6·64) の第１式から

$$R_{ij} = (n-1)g_{ij}$$

が出てくるので，この対称テンソル g_{ij} を用いて定義される Riemann 計量

$$ds^2 = g_{ij}du^i du^j \qquad \text{または} \qquad -g_{ij}du^i du^j$$

をもつ Riemann 空間は **Einstein 空間**，すなわち Ricci のテンソルに対して

$$R_{ij} = \frac{1}{n} g^{hk} R_{hk} g_{ij}$$

が成り立つような空間である．これによって Riemann 空間に関する次の定理がすぐ出てくる．

定理 6·6 Riemann 空間からつくった標準射影接続空間のホロノミー群が接点を含まなくて，分解しない二次超曲面を不変にすれば，この空間は Einstein 空間と射影的である．

第 7 章　共形接続幾何学

7·1　共形幾何学

n 次元 Euclid 空間 E^n において一つの斜交座標をとり，その座標が (x_1^i), (x_2^i) である二点の距離が

$$(g_{jk}(x_1^j - x_2^j)(x_1^k - x_2^k))^{1/2} \tag{7·1}$$

によって与えられるとする．したがって E^n 内の $(n-1)$ 次元的超球面（**超球面**）は一般に方程式

$$a^0 g_{jk} x^j x^k - 2 g_{jk} a^j x^k + 2a^\infty = 0 \tag{7·2}$$

で与えられる．その中心の座標は a^i/a^0, 半径の長さの 2 乗が $(g_{jk}a^j a^k - 2a^0 a^\infty)/a^0 a^0$ であるから，$a_0 \neq 0, g_{jk}a^j a^k - 2a^0 a^\infty > 0$ でなければならないが，$g_{jk}a^j a^k - 2a^0 a^\infty = 0, < 0$ のときには (7·2) がそれぞれ点および虚の超球面を定義しているという．さらに $a^0 = 0$ とおけば，(7·2) は一般に超平面の方程式となり，a^0 を 0 に近づけた場合に，超球面の半径が無限大になるから，われわれは超平面もまた超球面の一種と考えることができる．$a^0 = a^1 = \cdots = a^n = 0$ のとき，(7·2) は方程式としての意味をもたないが $g_{jk}a^j a^k - 2a^0 a^\infty = 0$ となるので，無限遠点とよばれる点を定義していると考えて，E^n にこの無限遠点を添加した集合を M^n で表わすことにする．

超球面の方程式 (7·2) の係数 a^0, a^i, a^∞ は座標空間 R^{n+2} の原点とは異なる一点の座標を表わすが，比のみが問題であるからこの超球面の斉次座標と考えることができる．しかるとき M^n の点は P^{n+1} 内の 2 次超曲面 Q^n

$$g_{jk} y^j y^k - 2y^0 y^\infty = 0 \tag{7·3}$$

上の点と 1 対 1 に対応し，E^n は Q^n から $N = (0, \cdots, 0, 1)$ を除いた部分と C^ω 級同型である．それでこの対応を用いて M^n を解析的多様体にし，n 次元の **Möbius 空間**または**共形空間**とよぶ．この対応の幾何学的な意味をつけてみよう．Q^n を N から P^{n+1} 内の超平面 $y^0 = y^\infty$ に**極射影**すると，点 $(y^0, y^i, y^\infty) \neq N$ の像は 6·1 の推論によって (y^0, y^i, y^0) になる．点 (a^0, a^i, a^∞)

の Q^n に関する極超平面の方程式は

$$g_{jk}a^j y^k-(a^0 y^\infty+a^\infty y^0)=0 \tag{7·4}$$

であるが，これと Q^n との交わりの極射影による像は (7·3) と (7·4) から y^∞ を消去して得られる方程式で表わされる．P^{n+1} からその無限遠超平面 $y^0=0$ を除いた部分に非斉次座標 $x^i=y^i/y^0$ を導入し，この像の方程式を非斉次座標で表わすと，容易に (7·2) となることがわかる．したがって M^n の超球面は Q^n と P^{n+1} 内の超平面との交わりに対応し，超球面の斉次座標は，この超平面の Q^n に関する極の斉次座標となっていることがわかった．

初等幾何学でよく知られているように，中心距離 d，半径がそれぞれ r_1, r_2 である二円のなす角 θ は $d^2=r_1^2+r_2^2-2r_1r_2\cos\theta$ であるから，斉次座標がそれぞれ $(a^0, a^i, a^\infty), (b^0, b^i, b^\infty)$ である二超球面のなす角 θ は同様にして

$$\cos\theta=\frac{g_{jk}a^j b^k-(a^0 b^\infty+a^\infty b^0)}{\sqrt{g_{jk}a^j a^k-2a^0 a^\infty}\sqrt{g_{jk}b^j b^k-2b^0 b^\infty}} \tag{7·5}$$

で与えられる．したがって二超球面が直交するための条件は

$$g_{jk}a^j b^k-a^0 b^\infty-a^\infty b^0=0 \tag{7·6}$$

となる．これは P^{n+1} で考えると，上記の斉次座標をもつ二点が Q^n に関して互に調和共役であることを示している．この関係は一方が M^n の点を表わすとき，それが他方の超球面上にあることを示すことは明らかである．

さて，P^{n+1} の射影変換で Q^n を不変にするものは Q^n 上の１対１の変換を誘導する．これを

$$\rho y'^\beta=a_\alpha^\beta y^\alpha, \qquad \alpha, \beta=0, 1, \cdots, n, \infty \tag{7·7}$$

とおけば，定義によって (7·3) を不変にするから

$$\begin{aligned}\rho^2(g_{hk}y'^h y'^k-2y'^0 y'^\infty)&=(g_{hk}a_\alpha^h a_\beta^k-2a_\alpha^0 a_\beta^\infty)y^\alpha y^\beta\\&=\sigma(g_{ij}y^i y^j-2y^0 y^\infty)\end{aligned}$$

である σ がある．ゆえに

$$\sigma g_{\alpha\beta}=g_{hk}a_\alpha^h a_\beta^k-a_\alpha^0 a_\beta^\infty-a_\alpha^\infty a_\beta^0$$

ただし，ここに

$$g_{00}=g_{0i}=g_{i0}=g_{i\infty}=g_{\infty i}=g_{\infty\infty}=0, \qquad g_{0\infty}=g_{\infty 0}=-1$$

とおいた．以下本章では，ギリシヤ文字の添字 α, β, γ 等はつねに $0, 1, \cdots, n, \infty$ をうごくものと約束しよう．座標が $(\overset{0}{a_\alpha}, \overset{i}{a_\alpha}, \overset{\infty}{a_\alpha})$ である R^{n+2} の点を R_α，これを斉次座標にもつ P^{n+1} の点を p_α とすれば，上の関係式から，p_0 と p_∞ は Q^n 上の点であり，p_i はこの二点での接超平面上にあるから，Q^n の外点でなければならない．したがって $\sigma>0$ であるから，(7·7) の係数 $\overset{\beta}{a_\alpha}$ は条件

$$g_{\alpha\beta}=g_{hk}\overset{h}{a_\alpha}\overset{k}{a_\beta}-\overset{0}{a_\alpha}\overset{\infty}{a_\beta}-\overset{\infty}{a_\alpha}\overset{0}{a_\beta} \tag{7·8}$$

をみたすと考えてよろしい．もちろんこのような射影変換は Q^n を不変にすることは明らかである．以上の説明からすぐに，Q^n 上に誘導される変換は M^n 上の点の1対1の変換を定義し，それは点の軌跡としての超球面を超球面にうつすことがわかる．R^{n+2} の二点 $X=(x^\alpha), Y=(y^\alpha)$ に対する**内積**を

$$X\cdot Y=g_{jk}x^jy^k-x^0y^\infty-x^\infty y^0 \tag{7·9}$$

で定義すれば，(7·8) は

$$g_{\alpha\beta}=R_\alpha\cdot R_\beta \tag{7·10}$$

と書くことができる．これは超球面の組 (R_0, R_i, R_∞) が R^{n+2} の各座標軸上の単位点によって表わされる超球面の組，すなわち M^n の原点，超平面 $g_{ik}x^k=0$，無限遠点からなる組と内積 (7·9) に関して全く同じ関係にあることを示している．さらに R^{n+2} の線型変換としての

$$y'^\beta=\overset{\beta}{a_\alpha}y^\alpha$$

は (7·8) によって，2次形式 $g_{jk}y^jy^k-2y^0y^\infty$ を不変にするから，R^{n+2} の任意の二点 $X=(x^\alpha), Y=(y^\alpha)$ に対して

$$g_{jk}x'^jy'^k-x'^0y'^\infty-x'^\infty y'^0=g_{jk}x^jy^k-x^0y^\infty-x^\infty y^0 \tag{7·11}$$

が成立する．公式 (7·5) とこれらの推論を組みあわせれば，この変換は M^n 上の変換として相交わる二超球面のなす角を保つ変換であることがわかる．このような M^n 上の1対1の点変換を **Möbius 変換**または**共形変換**という．M^n 上の1対1の点変換で超球面を超球面にうつす任意の変換は，P^{n+1} の射影変換で Q^n を不変にするものから導かれることが，射影幾何学の基礎定理を用いて証明することができる．共形変換の全体は M^n 上の解析的な変換群

Π_nをつくることは，(7·7),(7·8) の形から明らかである．これを Möbius の**共形変換群**とよぶ．M^n の図形の性質で共形変換によって維持されるようなものを研究するのが n 次元の **Möbius 幾何学**または**共形幾何学**である．

共形変換群は Lie 群として，Q^n を不変にする射影変換のつくる Σ_{n+1} の部分群と同型であるが，これらの射影変換は Q^n の内部を内部にうつす変換群を誘導する．Q^n の内部を $n+1$ 次元の双曲的非ユークリッド空間とよび，そこでの変換として，これらの変換は双曲的非ユークリッド運動とよばれる．図形の性質で双曲的非ユークリッド運動で変らないものを研究するのが双曲的非ユークリッド幾何学である．n 次元の共形幾何学と $n+1$ 次元の双曲的非ユークリッド幾何学とは，Q^n を不変にする射影変換のつくる部分群が作用する部分を Q^n とするか，Q^n の内部とするかによって分かれた F. Klein の意味での幾何学と考えることができる．

R^{n+2} の基をなす $\{R_0, R_i, R_\infty\}$ が (7·10) を満足するとすれば，これらから定まる P^{n+1} の斉次座標系についての Q^n の方程式がやはり (7·3) となることは

$$Y=R_\alpha y^\alpha \tag{7·12}$$

とおいて

$$Y\cdot Y=R_\alpha\cdot R_\beta y^\alpha y^\beta=g_{jk}y^j y^k-2y^0 y^\infty \tag{7·13}$$

であることから明らかである．このような $\{R_0, R_i, R_\infty\}$ によって定まる P^{n+1} の斉次座標系，すなわち標構が M^n に定める超球面の組を M^n の**標構**という．前に述べたように，M^n の共形変換 (7·7) を (7·8) のように標準化したとき，これから定まる $R_\alpha=(\overset{0}{a_\alpha}, \overset{i}{a_\alpha}, \overset{\infty}{a_\alpha})$ は M^n の標構を一意に定めると考えられる．逆に任意の標構 $\{R_0, R_i, R_\infty\}$ に対して一つの共形変換が定まるから，共形変換群は位相的には M^n の標構の集まりと同型である．共形変換 (7·7) を (7·8) のように標準化すれば，共形変換群は R^{n+2} の二次形式 $Y\cdot Y=g_{jk}y^j y^k-2y^0 y^\infty$ を不変にする一次変換のつくる $GL(n+2)$ の部分群 Π_n' の恒等変換と対称変換 $y'^\alpha=-y^\alpha$ からなる部分群を法としてできる商群と同型である．y^0 軸を不変にする Π_n' の変換は (7·8) によって

$$(a_\alpha^\beta)=\begin{pmatrix} a_0^0 & a_i^0 & a_\infty^0 \\ 0 & a_i^j & a_\infty^j \\ 0 & 0 & a_\infty^\infty \end{pmatrix} \tag{7·14}$$

の形をしていて，しかも

$$a_0^0 a_\infty^\infty=1, \qquad g_{hk}a_\infty^h a_\infty^k-2a_\infty^0 a_\infty^\infty=0$$
$$g_{hk}a_i^h a_j^k=g_{ij}, \qquad g_{hk}a_j^h a_\infty^k-a_j^0 a_\infty^\infty=0 \tag{7·15}$$

である．

M^n において最も簡単な曲線は Q^n において最も簡単な曲線，すなわち Q^n と射影平面との交わりである二次曲線に対応するものである．したがって $n-1$ 個の超球面の交わりと考えられる円ということになる．円の方程式を導いてみよう．円の上の二点を表わす R^{n+2} の点を Y_0, Y_∞ とし，Y_1 をこれらの三点によって定まる射影平面がこの円を定める射影平面で，しかも $Y_0\cdot Y_1=Y_1\cdot Y_\infty=0$ であるような点とする．しかるとき $Y_0\cdot Y_\infty=a$, $Y_1\cdot Y_1=b$ とおけば $a, b\neq 0$ である．$Y=Y_0y^0+Y_1y^1+Y_\infty y^\infty$ に対して

$$Y\cdot Y=by^1y^1+2ay^0y^\infty$$

となるから，円の上の点は

$$Y=Y_0y^0+Y_1y^1+Y_\infty y^\infty, \qquad by^1y^1+2ay^0y^\infty=0$$

で与えられる．$y^0=0$ ならば $y^1=1$ が出るので円上の点で $y^0=0$ となるのは Y_∞ に対応する点だけである．これを除いた部分では $y^1/y^0=\sigma$ とおけば

$$Y=Y_0+\sigma Y_1-\frac{b}{2a}\sigma\sigma Y_\infty \tag{7·16}$$

が，この円上の点を表わす．よく知られているように，この σ は二次曲線の射影的媒介変数であるから，**円の射影的媒介変数**と考えてよろしい．(7·16) は明らかに微分方程式

$$\frac{d^3Y}{d\sigma^3}=0 \tag{7·17}$$

をみたす．逆に (7·17) の解で，Q^n 上の曲線を表わすものが M^n 上の円を表わすことは明らかであり，σ はその射影的媒介変数を表わす．

$GL(n+2)$ 上での函数として a^{β}_{α} は Π'_n の上でベクトル値函数として $R_\alpha=(a^0_\alpha, a^i_\alpha, a^\infty_\alpha)$ を定義しているものと考えよう．$R_\alpha\cdot R_\beta=g_{\alpha\beta}$ であるから

$$dR_\alpha=R_\beta\pi^\beta_\alpha \tag{7·18}$$

とおけば，π^β_α は Π'_n の上の微分形式であるが関係式

$$g_{\alpha\gamma}\pi^\gamma_\beta+g_{\gamma\beta}\pi^\gamma_\alpha=0 \tag{7·19}$$

をみたす．(7·18) は $da^\beta_\alpha=a^\beta_\gamma\pi^\gamma_\alpha$ であるから，π^β_α は $GL(n+2)$ 上の微分形式 $b^\beta_\gamma da^\gamma_\alpha$ を部分群 Π'_n 上に制限したものである．(7·19) を詳しく書けば

$$\begin{aligned}&\pi^\infty_0=\pi^0_\infty=0, \quad \pi^\infty_i=g_{ij}\pi^j_0, \quad \pi^0_i=g_{ij}\pi^j_\infty\\ &\pi^0_0+\pi^\infty_\infty=0, \quad g_{ik}\pi^k_j+g_{kj}\pi^k_i=0\end{aligned} \tag{7·19)$'$ (}$$

となることは明らかである．

7·2 R^{n+2} をファイバーとするベクトル・バンドルと接続

n 次元の連結な C^r 級多様体 X の上に，重さ $2W$ をもち，至るところでその成分の行列式の値が正である C^{r-1} 級反変対称接テンソル場が与えられているものとする．座標近傍 (U,u) における自然標構 $\{\partial/\partial u^i\}$ に関してのこのテンソルの成分を $L^{ij}(u)=L^{ji}(u)$ で表わそう．他の座標近傍 (V,v) との共通部分 $U\cap V$ において

$$L^{hk}(v)=\Delta^{-2W}\frac{\partial v^h}{\partial u^i}\frac{\partial v^k}{\partial u^j}L^{ij}(u), \tag{7·20}$$

$$\Delta=\Delta(v,u)=\left|\frac{\partial v^k}{\partial u^i}\right|$$

である．$|L^{ij}(u)|\neq 0$ であるという仮定から，$L_{ij}(u)=L_{ji}(u)$ なる成分をもつ X 上の重さ $-2W$ の共変対称接テンソル場が関係式

$$L_{ik}(u)L^{kj}(u)=\delta^j_i \tag{7·21}$$

によって定義される．

さて，前章のように X を底空間とするベクトル・バンドルを 4·3 で述べた方法に従って，ファイバー Y を R^{n+2} とし，バンドルの群 G_0 を

$$a^j_0(g)=a^\infty_0(g)=a^\infty_i(g)=0, \quad a^0_0(g)a^\infty_\infty(g)=1 \tag{7·22}$$

であるような元 g からなる $GL(n+2)$ の部分群として次のようにつくる．ファイバー・バンドル $\mathfrak{F}_0=\{Z, X, \pi, Y, G_0\}$ の座標変換

$$g_{VU} : U\cap V \to G_0$$

を (4·33) に従って

$$g_{VU}=\Delta^{-W}\begin{pmatrix} 1 & \rho_i & \dfrac{1}{2}L^{kh}(u)\rho_k\rho_h \\ 0 & \dfrac{\partial v^j}{\partial u^i} & \dfrac{\partial v^j}{\partial u^k}L^{kh}(u)\rho_h \\ 0 & 0 & \Delta^2 W \end{pmatrix} \qquad (7\cdot23)$$

ただし，$\rho_i=\partial\log(\Delta(v,u))^c/\partial u^i$，$c$＝定数とする．これで定義されるベクトル・バンドル $\mathfrak{F}_0$ に対して，バンドルの群を $GL(n+2)$ でおきかえたものを $\mathfrak{F}$ で表わし $\mathfrak{F}_0$ と区別することにする．

X の各座標近傍 (U, u) での $\mathfrak{F}_0$ の座標函数を φ_U とし，φ_U による $\mathfrak{F}$ の局所切断

$$z_{(U)\alpha}(x)=\varphi_U(x, y_\alpha), \qquad x\in U \qquad (7\cdot24)$$

を考える．ただし $y_\alpha=(\delta_\alpha^0, \delta_\alpha^i, \delta_\alpha^\infty)$，$\alpha=0, 1, \cdots, n, \infty$．ファイバー Y_x における内積を，Y_x の基の局所場 $z_{(U)\alpha}$ を用いて

$$z_{(U)\alpha}\cdot z_{(U)\beta}=L_{\alpha\beta}(u) \qquad (7\cdot25)$$

$$L_{00}(u)=L_{0\infty}(u)=L_{0i}(u)=L_{i\infty}(u)=0, \qquad L_{0\infty}(u)=-1$$

と定義する．実際にこの定義が X 全体において意味をもっている．なんとなれば $U\cap V \neq \phi$ において

$$L_{\gamma\delta}(v)(a_\alpha^\gamma\cdot g_{VU})(a_\beta^\delta\cdot g_{VU})=L_{hk}(v)(a_\alpha^h\cdot g_{VU})(a_\beta^k\cdot g_{VU})$$
$$-(a_\alpha^0\cdot g_{VU})(a_\beta^\infty\cdot g_{VU})-(a_\alpha^\infty\cdot g_{VU})(a_\beta^0\cdot g_{VU})$$

は $(\alpha, \beta)=(0,0), (0,i)$ のとき 0 であることがすぐ出る．次に $(\alpha, \beta)=(i, \infty)$ のとき

$$=\Delta^{-2W}\left(L_{hk}(v)\frac{\partial v^h}{\partial u^i}\frac{\partial v^k}{\partial u^l}L^{lj}(u)\rho_j-\rho_i\Delta^2 W\right)$$

$$=L_{il}(u)L^{lj}(u)\rho_j-\rho_i=0,$$

$(\alpha, \beta)=(\infty, \infty)$ のとき

$$=\Delta^{-2}W\left(L_{hk}(v)\frac{\partial v^h}{\partial u^i}L^{il}(u)\rho_l\frac{\partial v^k}{\partial u^j}L^{jm}(u)\rho_m-\Delta^2 W L^{hk}(u)\rho_h\rho_k\right)$$

$$=L_{ij}(u)L^{il}(u)L^{jm}(u)\rho_l\rho_m-L^{hk}(u)\rho_h\rho_k=0$$

$(\alpha,\beta)=(0,\infty)$ のときには -1 となることもすぐに出てくる．最後に $(\alpha,\beta)=(i,j)$ のときには

$$=\Delta^{-2}WL_{hk}(u)\frac{\partial v^h}{\partial u^i}\frac{\partial v^k}{\partial u^j}=L_{ij}(u)$$

であるから，次の関係式

$$L_{\gamma\delta}(v)(a^{\gamma}_{\alpha}\cdot g_{VU})(a^{\delta}_{\beta}\cdot g_{VU})=L_{\alpha\beta}(u) \tag{7·26}$$

が成り立つのである．この式は上に述べた各ファイバー Y_x での内積の定義が点 x を含む座標近傍の選び方に無関係に定まることを示している．(7·26) は $\mathfrak{F}$ における一般共変対称テンソル場 L があって，$L_{\alpha\beta}(u)$ が $\mathfrak{F}$ の局所標構 $z_{(U)\alpha}$ に関する L の成分を表わしていることを示している．われわれは $\mathfrak{F}_0$ を X の**共形的接ベクトル・バンドル**とよび，L をその**基本共形テンソル**とよぼう．

さて $\mathfrak{F}$ に 4·5 で述べた意味での接続が与えられ，しかも基本共形テンソル L がこの接続に関して平行であるとする．すなわち

$$DL=0 \tag{7·27}$$

座標近傍 (U,u) において，$\mathfrak{F}$ のこの接続に関する共変微分が

$$Dz_{(U)\alpha}=z_{(U)\beta}\otimes\omega^{\beta}_{\alpha},\qquad \omega^{\beta}_{\alpha}=\omega_{U\alpha}^{\beta} \tag{7·28}$$

で表わされるとすれば，(7·27) は

$$DL_{\alpha\beta}\equiv dL_{\alpha\beta}-L_{\gamma\beta}\omega^{\gamma}_{\alpha}-L_{\alpha\gamma}\omega^{\gamma}_{\beta}=0,\qquad L_{\alpha\beta}=L_{\alpha\beta}(u) \tag{7·29}$$

となる．これを丁寧に書けば

$$\omega^{\infty}_{0}=\omega^{0}_{\infty}=0,\qquad \omega^{\infty}_{i}=L_{ik}\omega^{k}_{0},\qquad \omega^{0}_{i}=L_{ik}\omega^{k}_{\infty} \tag{7·29}'$$

$$\omega^{0}_{0}+\omega^{\infty}_{\infty}=0,\qquad dL_{ij}-L_{kj}\omega^{k}_{i}-L_{ik}\omega^{k}_{j}=0$$

となる．ξ_1,ξ_2 が U で定義された $\mathfrak{F}$ の局所切断とし，

$$\xi_1=z_{(U)\alpha}\xi^{\alpha}_1,\qquad \xi_2=z_{(U)\alpha}\xi^{\alpha}_2$$

とおけば，(7・29) によって

$$d(\xi_1\cdot\xi_2)=d(L_{\alpha\beta}\xi_1^{\alpha}\xi_2^{\beta})=dL_{\alpha\beta}\xi_1^{\alpha}\xi_2^{\beta}+L_{\alpha\beta}(d\xi_1^{\alpha}\xi_2^{\beta}+\xi_1^{\alpha}d\xi_2^{\beta})$$
$$=L_{\alpha\beta}(d\xi_1^{\alpha}+\omega_{\gamma}^{\alpha}\xi_1^{\gamma})\xi_2^{\beta}+L_{\alpha\beta}\xi_1^{\alpha}(d\xi_2^{\beta}+\omega_{\gamma}^{\beta}\xi_2^{\gamma})$$
$$=L_{\alpha\beta}(D\xi_1^{\alpha}\xi_2^{\beta}+\xi_1^{\alpha}D\xi_2^{\beta})=(D\xi_1)\cdot\xi_2+\xi_1\cdot(D\xi_2)$$

つまり共変微分について公式

$$d(\xi_1\cdot\xi_2)=(D\xi_1)\cdot\xi_2+\xi_1\cdot(D\xi_2) \tag{7·30}$$

が成立する．さらに他の座標近傍 (V,v) との共通部分 $U\cap V\neq\phi$ において

$$\omega_{U}{}_{\alpha}^{\beta}=(a_{\gamma}^{\beta}\cdot g_{UV})(d(a_{\alpha}^{\gamma}\cdot g_{VU})+\omega_{V}{}_{\delta}^{\gamma}(a_{\alpha}^{\delta}\cdot g_{VU})) \tag{7·31}$$

であるから，これに (7・23) と (7・29)′ を代入すれば

$$\omega_{U}{}_{0}^{0}=\omega_{V}{}_{0}^{0}+\frac{\partial\log\Delta(u,v)^{c}}{\partial v^{i}}\,\omega_{V}{}_{0}^{i}+d\log\Delta(v,u)^{-W},$$

$$\omega_{U}{}_{i}^{0}=\frac{\partial u^{i}}{\partial v^{k}}\,\omega_{V}{}_{0}^{k},$$

$$\omega_{U}{}_{i}^{j}=\frac{\partial u^{j}}{\partial v^{k}}\left\{d\frac{\partial v^{k}}{\partial u^{i}}+\omega_{V}{}_{h}^{k}\frac{\partial v^{h}}{\partial u^{i}}+\omega_{V}{}_{0}^{k}\frac{\partial\log\Delta(v,u)^{c}}{\partial u^{i}}\right.$$
$$\left.+\frac{\partial\log\Delta(u,v)^{c}}{\partial v^{h}}L^{hk}(v)\,\omega_{V}{}_{l}^{\infty}\frac{\partial v^{l}}{\partial u^{i}}\right\}+\delta_{i}^{j}d\log\Delta(v,u)^{-W} \tag{7·31′}$$

$$\omega_{U}{}_{i}^{0}=\omega_{V}{}_{h}^{0}\frac{\partial v^{h}}{\partial u^{i}}+d\frac{\partial\log\Delta(v,u)^{c}}{\partial u^{i}}+\omega_{V}{}_{0}^{0}\frac{\partial\log\Delta(v,u)^{c}}{\partial u^{i}}$$
$$+\frac{\partial\log\Delta(u,v)^{c}}{\partial v^{j}}\left\{d\frac{\partial v^{j}}{\partial u^{i}}+\omega_{V}{}_{h}^{j}\frac{\partial v^{h}}{\partial u^{i}}+\omega_{V}{}_{0}^{j}\frac{\partial\log\Delta(v,u)^{c}}{\partial u^{i}}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}\frac{\partial\log\Delta(u,v)^{c}}{\partial v^{k}}L^{kj}(v)\,\omega_{V}{}_{h}^{\infty}\frac{\partial v^{h}}{\partial u^{i}}\right\}$$

が出る．

さて各座標近傍において至るところ

$$\omega_0^1\wedge\omega_0^2\wedge\cdots\wedge\omega_0^n\neq 0 \tag{7·32}$$

であると仮定しよう．これは上記 (7・31)′ の第2の関係から自然な条件であることがわかる．$\mathfrak{F}_0$ の座標函数をこの接続に関して都合のよいものにとりかえよう．まず

$$\bar{z}_{(U)\alpha}=z_{(U)\beta}p_\alpha^\beta \tag{7·33}$$

$$p_0^j=p_0^\infty=p_i^\infty=0, \qquad p_0^0p_\infty^\infty=1, \qquad |p_\alpha^\beta|\neq 0$$

とおいて

$$\bar{L}_{\alpha\beta}=\bar{L}_{\alpha\beta}(u)=\bar{z}_{(U)\alpha}\cdot\bar{z}_{(U)\beta}=L_{hk}(u)p_\alpha^h p_\beta^k-p_\alpha^0 p_\beta^\infty-p_\alpha^\infty p_\beta^0$$

であるから，$\bar{L}_{00}=\bar{L}_{0i}=0, \bar{L}_{0\infty}=-1$．そこで $\bar{L}_{i\infty}=\bar{L}_{\infty\infty}=0$ を要求すれば

$$\bar{L}_{hk}p_i^h p_\infty^k=p_i^0 p_\infty^\infty, \qquad L_{hk}p_\infty^h p_\infty^k=2p_\infty^0 p_\infty^\infty \tag{7·34}$$

となるから，p_0^0, p_i^0, p_i^j が与えられれば他の p_α^β は一意に決定する．なお

$$\bar{L}_{ij}=L_{hk}p_i^h p_j^k \tag{7·35}$$

である．ところで $z_\alpha=z_{(U)\alpha}$ と書いて

$$Dz_0=z_0\otimes\omega_0^0+z_i\otimes\omega_0^i$$

であるから，p_i^0, p_i^j を

$$\omega_0^0=p_i^0du^i, \qquad \omega_0^j=p_i^jdu^i$$

できめて，$p_0^0=1$ とおけば上に述べた方法で p_α^β が定まる．これで

$$D\bar{z}_\alpha=\bar{z}\otimes\bar{\omega}_\alpha^\beta$$

とおけば

$$\bar{\omega}_0^0=0, \qquad \bar{\omega}_0^i=du^i$$

となる．$\omega_{U0}^{\ i}=du^i$ となるような $\mathfrak{F}_0$ の標構場を，与えられた接続に関する $\mathfrak{F}_0$ の**準自然標構**とよぶ．上に求めた各座標近傍における準自然標構ははじめに与えられたものから一意に求められたものである．このような座標函数に対する座標変換はどうなるかをみよう．$U\cap V\neq\phi$ において，$z_{(U)0}=z_{(V)0}\Delta(v,u)^{-W}$ だから

$$D\bar{z}_{(U)0}=\bar{z}_{(V)0}\otimes\Delta^{-W}d\log\Delta^{-W}+\bar{z}_{(V)i}\otimes\Delta^{-W}dv^i$$

よって

$$\bar{z}_{(U)i}=\Delta^{-W}\left(\bar{z}_{(V)0}\frac{\partial\log\Delta^{-W}}{\partial u^i}+\bar{z}_{(V)j}\frac{\partial v^j}{\partial u^i}\right)$$

である．これらから内積をつくって

$$\bar{L}_{ij}(u)=\Delta(v,u)^{-2W}\bar{L}_{hk}(v)\frac{\partial v^h}{\partial u^i}\frac{\partial v^k}{\partial u^j}$$

したがって

$$\bar{L}^{hk}(v)=\Delta(v,u)^{-2W}\frac{\partial v^h}{\partial u^i}\frac{\partial v^k}{\partial u^j}\bar{L}^{ij}(u) \qquad (7\cdot20)'$$

を得る．これにより $\bar{L}^{ij}(u)$ は $L^{ij}(u)$ と同じく重さ $2W$ の対称接テンソル場の $\{\partial/\partial u^i\}$ に関する成分を表わしている．両者は X の接テンソル場として異なるものを表わすが，基本共形テンソル L の相異なる標構に関する成分として異なっているにすぎないことに注意しておく．(7·33) を利用すると $\mathfrak{F}_0$ の座標変換 $\bar{g}_{VU}: U\cap V\to G_0$ は以上の計算から

$$\bar{g}_{VU}=\Delta^{-W}\begin{pmatrix} 1 & \dfrac{\partial\log\Delta^{-W}}{\partial u^i} & \dfrac{1}{2}\bar{L}^{hk}(u)\dfrac{\partial\log\Delta^{-W}}{\partial u^h}\dfrac{\partial\log\Delta^{-W}}{\partial u^k} \\ 0 & \dfrac{\partial v^j}{\partial u^i} & \dfrac{\partial v^j}{\partial u^h}\bar{L}^{hk}(u)\dfrac{\partial\log\Delta^{-W}}{\partial u^k} \\ 0 & 0 & \Delta^{2W} \end{pmatrix} \qquad (7\cdot23)'$$

となることがわかった．

以上の推論によって，接続が (7·32) をみたすときにはこのようにして得られた準自然標構を用いることにして，はじめから

$$\omega_0^0=0, \qquad \omega_0^i=du^i \qquad (7\cdot36)$$

と仮定し，$\mathfrak{F}_0$ の座標変換 (7·23) は $c=-W$ とおいたものと考えてよろしい．この座標函数から定まる標構を，与えられた接続に関する **Veblen 標構**とよぶ．

ところで，(7·36) をみたす標構としての Veblen 標構はただ一つというわけでない．再び (7·33) なるように $\mathfrak{F}_0$ の座標函数をとりかえれば

$$D\bar{z}_0=z_0\otimes dp_0^0+z_ip_0^0\otimes du^i=\left(z_i+z_0\frac{\partial\log p_0^0}{\partial u^i}\right)p_0^0\otimes du^i$$

である．したがって

$$p_i^0=p_0^0\frac{\partial\log p_0^0}{\partial u^i}, \qquad p_i^j=p_0^0\delta_i^j$$

であることが，このような準自然標構であるための条件となる．(7·34) によって p_α^β は $p_0^0=\sigma$ のみに関係する．すなわち

$$(p_\alpha^\beta)=\sigma\begin{pmatrix} 1 & \dfrac{\partial\log\sigma}{\partial u^i} & \dfrac{1}{2\sigma^2}L^{hk}\dfrac{\partial\log\sigma}{\partial u^h}\dfrac{\partial\log\sigma}{\partial u^k} \\ 0 & \delta_i^j & \dfrac{1}{\sigma^2}L^{jk}\dfrac{\partial\log\sigma}{\partial u^k} \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{\sigma^2} \end{pmatrix} \tag{7·37}$$

である．この変換を $\tilde{\sigma}$ で表わすことにする．さらに $L_{\alpha\beta}(u)=\bar{z}_\alpha\cdot\bar{z}_\beta$ であることを要求すれば $\sigma=\pm1$ でなければならない．よってこの接続に関する Veblen 標構でこのような条件をみたすものは与えられた座標函数系 φ_U から対称変換を除いて一意に定まることがわかった．

さてもとにもどって公式 (7·23) から

$$|a_\alpha^\beta\cdot g_{VU}|=\Delta^{-nW+1},\qquad \Delta=\Delta(v,u)$$

が出る．したがって $U\cap V$ において

$$z_{(U)0}\wedge\cdots\wedge z_{(U)\infty}=\Delta^{-nW+1}z_{(V)0}\wedge\cdots\wedge z_{(V)\infty}$$

であるから $\Lambda^{n+2}(\mathfrak{F}_0)$ は X の重さ $nW-1$ のスカラーのつくる接バンドルをなす．$\mathfrak{F}$ の任意の接続に対して座標近傍 U では

$$D(z_{(U)0}\wedge\cdots\wedge z_{(U)\infty})=z_{(U)0}\wedge\cdots\wedge z_{(U)\infty}\otimes\omega_\alpha^\alpha \tag{7·38}$$

が成立する．したがって重さ $m(1-nW)$ の X の任意のスカラー場 σ に対して公式

$$D\sigma_U=d\sigma_U-m\sigma_U\omega_\alpha^\alpha \tag{7·39}$$

が成立する．ただし σ_U は φ_U に関する σ の成分を表わすものとする．σ が至るところ 0 でないと仮定しよう．座標近傍 (U,u) において $\mathfrak{F}_0$ の座標函数 φ'_U を

$$z'_{(U)\alpha}=z_{(U)\beta}(a_\alpha^\beta\cdot\tilde{\sigma}_U) \tag{7·40}$$

で定義すれば，$U\cap V\neq\phi$ において

$$z'_{(U)\alpha}=z_{(V)\beta}(a_\alpha^\beta\cdot(g_{VU}\tilde{\sigma}_U))=z'_{(V)\beta}(a_\alpha^\beta\cdot(\tilde{\sigma}_V^{-1}g_{VU}\tilde{\sigma}_U))$$

である．仮定によって

$$\sigma_U = \Delta^{m(1-nW)}\sigma_V$$

であるから，(7・23), (7・37) 等を用いて計算すれば $\{\varphi'_U\}$ に対する座標変換は

$$g'_{VU} = \tilde{\sigma}_V^{-1} g_{VU} \tilde{\sigma}_U = \Delta^{-W'} \begin{pmatrix} 1 & \rho_i' & \dfrac{1}{2(\sigma_U)^2} L^{hk}(u)\rho_h'\rho_k' \\ 0 & \dfrac{\partial v^j}{\partial u^i} & \dfrac{1}{(\sigma_U)^2}\dfrac{\partial v^j}{\partial u^h} L^{hk}(u)\rho_k' \\ 0 & 0 & \Delta^{2W'} \end{pmatrix} \tag{7・41}$$

$$W' = W - m(1-nW), \qquad \rho_i' = \frac{\partial \log \Delta^{c'}}{\partial u^i}, \qquad c' = c + m(1-nW)$$

となる．そこで

$$L'_{\alpha\beta}(u) = z'_{(U)\alpha} \cdot z'_{(U)\beta}$$

とおけば

$$L'_{ij}(u) = (\sigma_U)^2 L_{ij}(u), \quad L'_{00} = L'_{0i} = L'_{i\infty} = L'_{\infty\infty} = 0, \quad L'_{0\infty} = -1$$

であるから，これらの座標函数 φ'_U を用いれば座標変換 g'_{VU} は g_{VU} と全く同じ形をしている．しかも φ_U が与えられた接続に関する Veblen 標構を定めていると仮定すれば，前記の推論によって φ'_U もまたこの接続に関する Veblen 標構を定める．

$\mathfrak{F}_0$ の座標函数 $\{\varphi_U\}$ が与えられた接続に関する Veblen 標構を定めるものとする．$U \cap V \neq \phi$ では

$$L_{hk}(v) = \Delta^{2W} \frac{\partial u^i}{\partial v^h} \frac{\partial u^j}{\partial v^k} L_{ij}(u)$$

であるから，両辺の行列式をつくると

$$|L_{hk}(v)| = \Delta^{2(nW-1)} |L_{ij}(u)|$$

である．したがって $|L_{ij}(u)|^{-1/n}$ は重さ $-2(1-nW)/n$ のスカラー場の座標近傍 (U, u) に関する成分をなす．しかるとき，とくに

$$G_{ij}(u) = |L_{hk}(u)|^{-1/n} L_{ij}(u) \tag{7・42}$$

とおけば，これは

$$|G_{ij}(u)|=1 \tag{7·43}$$

で特性づけられる重さ $-2/n$ の共変対称テンソル場の成分である．Veblen 標構を用いているから，これに対する (7·41) は $W'=1/n,\ c'=-1/n$ となるので $\mathfrak{F}_0$ の座標変換 g_{VU} は

$$g_{VU}=\Delta^{-1/n}\begin{pmatrix} 1 & \rho_i & \frac{1}{2}G^{hk}(u)\rho_h\rho_k \\ 0 & \frac{\partial v^j}{\partial u^i} & \frac{\partial v^j}{\partial u^h}G^{hk}(u)\rho_k \\ 0 & 0 & \Delta^{2/n} \end{pmatrix} \tag{7·44}$$

$$\rho_i=\frac{\partial\log\Delta^{-1/n}}{\partial u^i}, \qquad \Delta=\Delta(v,u)$$

となる．$G_{ij}(u), G_{00}(u)=G_{0i}(u)=G_{i\infty}(u)=G_{\infty\infty}(u)=0, G_{0\infty}(u)=-1$ は共形的基本テンソル L のこの Veblen 標構に関する成分をなしている．この標構に関して接続 Γ を表わす微分形式系 ω_α^β は (7·27) によって

$$DG_{\alpha\beta}=dG_{\alpha\beta}-G_{\gamma\beta}\omega_\alpha^\gamma-G_{\alpha\gamma}\omega_\beta^\gamma=0,$$

とくに

$$dG_{ij}-G_{kj}\omega_i^k-G_{ik}\omega_j^k=0$$

他方 (7·43) から $G^{ij}dG_{ij}=0$ である．これに上の関係を代入すると

$$\omega_i^i=0$$

が出てくる．よってこの標構に関する ω_α^β は次の諸関係をみたす．

$$\begin{aligned} &\omega_0^0=\omega_0^\infty=\omega_\infty^0=\omega_\infty^\infty=0, \qquad \omega_i^i=0, \qquad \omega_0^i=du^i \\ &\omega_i^\infty=G_{ik}du^k, \qquad \omega_i^0=G_{ik}\omega_\infty^k \\ &G_{kj}\omega_i^k+G_{ik}\omega_j^k=dG_{ij}, \qquad |G_{ij}|=1. \end{aligned} \tag{7·45}$$

この標構は与えられた接続 Γ に関する**自然標構**とよばれる．以上まとめると

定理 7·1 座標変換が (7·23) で与えられる X の上の共形的ベクトル・バンドル $\mathfrak{F}_0$ に対して，基本共形テンソル L が平行 ($DL=0$) で (7·32) をみたすような接続 Γ が与えられているとする．しかるとき $\mathfrak{F}_0$ の座標函数を適当にとりかえれば，$\mathfrak{F}_0$ の座標変換が (7·44)，Γ を表わす微分形式系が (7·

45) となるようにできる．ここに $G_{\alpha\beta}$ はこのような標構に関する L の成分を表わす．

最後に X の各点 x において，Y_x の部分空間 N_x を

$$z\cdot z=L_{\alpha\beta}z^{\alpha}z^{\beta}=0 \tag{7·46}$$

$\pi(z)=x, x\in U, z=z_{(U)\alpha}z^{\alpha}$ なる z の集合とすれば，N_x の集まりは $\mathfrak{Y}_0$ の部分バンドルを定義することは明らかである．

7·3　共形接続

前節で論じた共形的ベクトル・バンドル $\mathfrak{Y}_0, \mathfrak{Y}$ から，前章 6·3 において定義したのと全く同じ方法で $(n+1)$ 次元射影空間 P^{n+1} をファイバーとするファイバー・バンドル $\mathfrak{P}_0, \mathfrak{P}$ を定義し，さらに N_x から定まる P^{n+1}_x の二次超曲面 Q^n_x をファイバーとして定義される $\mathfrak{P}_0$ の部分バンドルを $\mathfrak{Q}_0$ で表わす．$\mathfrak{Q}_0$ を X の共形的接バンドルという．

$\mathfrak{Y}$ に与えられた二つの接続 $\Gamma, \bar{\Gamma}$ が互に射影的，すなわち $\mathfrak{P}$ に対して同じ射影的接続を導くものとすると，各座標近傍において両接続を表わす微分形式系 $\omega^{\beta}_{\alpha}, \bar{\omega}^{\beta}_{\alpha}$ は

$$\bar{\omega}^{\beta}_{\alpha}-\omega^{\beta}_{\alpha}=\delta^{\beta}_{\alpha}\omega \tag{7·47}$$

なる関係をみたし，右辺の ω は X 全体の上で定義される微分形式でなければならない．したがって $\mathfrak{Y}_0$ の基本共形テンソル L に対して

$$\bar{D}L-DL=-2L\otimes\omega$$

が成り立つ．したがって接続 Γ が

$$DL=L\otimes\tau \tag{7·48}$$

なる性質をもてば，$\bar{\Gamma}$ に対しても

$$\bar{D}L=L\otimes\bar{\tau}, \qquad \bar{\tau}=\tau-2\omega$$

なる形の関係が成立する．ここに τ は X 上の微分形式を表わす．

もし X の中の曲線で定義された $\mathfrak{Y}$ の切断 ξ がこの曲線に沿って

$$D\xi=\xi\otimes\psi dt$$

であれば，$\bar{\Gamma}$ に関しても同じような形になる．この曲線に沿ってのスカラー

場 $\xi\cdot\xi$ の微分は

$$d(\xi\cdot\xi)=d(L_{\alpha\beta}\xi^\alpha\xi^\beta)=(DL_{\alpha\beta})\xi^\alpha\xi^\beta+2L_{\alpha\beta}\xi^\alpha D\xi^\beta$$
$$=(L_{\alpha\beta}\xi^\alpha\xi^\beta)(\tau+2\psi dt)=(\xi\cdot\xi)(\tau+2\psi dt)$$

となるから，$\xi\cdot\xi$ が一点で 0 となれば至るところで 0 となる．したがって $\mathfrak{F}$ の接続で (7·48) をみたす，つまり N_x によって定義される二次超錐面の場が平行であるようなもののつくる射影的な類は $\mathfrak{Q}_0$ に一つの接続を定義する．この接続を $\mathfrak{Q}_0$ の共形接続という．もちろん $DL=0$ となる $\mathfrak{F}$ の接続は $\mathfrak{Q}_0$ に共形接続を定義するのであるが，前章の射影接続の場合と同じことが考慮されなければならない．すなわち X の各座標近傍 U において (7·48) のような $\mathfrak{F}$ の局所接続 Γ_U が与えられていて，二つの座標近傍 U, V の共通部分 $U\cap V\neq\phi$ で Γ_U と Γ_V が射影的に同等であるとすれば，Γ_U の集まりは $\mathfrak{Q}_0$ に一つの**共形接続**を定義すると考えるのである．ところが Γ_U として $DL=0$ なるものをとることができるから，$\mathfrak{Q}_0$ の共形接続は $DL=0$ となるような $\mathfrak{F}$ の接続 Γ から導かれるものとしてよろしい．$\mathfrak{F}$ の座標函数 φ_U に関して局所接続 Γ_U を表わす微分形式 ω_α^β が $\omega_\alpha^\alpha=0$ であるとき，Γ_U は φ_U **に関して正規**であるという．$DL=0$ である $\mathfrak{F}$ の接続 Γ に関する自然標構を φ_U が与えれば，(7·45) が示すように Γ は φ_U に関して正規である．逆に φ_U に関して Γ が正規でしかも φ_U が Γ に関する Veblen 標構を定める座標函数であれば，これらの Veblen 標構は自然標構から σ を定数 $\neq 0$ として変換 $\tilde{\sigma}$ (7·37) をほどこして得られことは明らかである．

いま，多様体 X に Riemann 計量が与えられているとし，座標近傍 (U, u) においてその線素 ds が

$$ds^2=g_{ij}(u)du^idu^j \tag{7·49}$$

であるとする．点 $x\in U$ における 0 ベクトルでない任意の接ベクトル ξ, η のなす角 θ は

$$\cos\theta=\frac{g_{ij}\xi^i\eta^j}{\sqrt{g_{ij}\xi^i\xi^j}\sqrt{g_{ij}\eta^i\eta^j}}$$

で定義される．ξ^i, η^i は自然標構 $\partial/\partial u^i$ に関する ξ, η の成分を表わす．角を

測る計量としては，U において至るところ正である函数 σ を用いて g_{ij} を $g'_{ij}=\sigma g_{ij}$ でおきかえても同じである．したがって X の接ベクトル・バンドル $T(X)$ における角計量は，正値因数を除いて与えられる局所 Riemann 計量の類によって定まる．ところで重さ $-2/n$ の共変対称テンソル場

$$G_{ij}(u)=|g_{hk}(u)|^{-1/n}g_{ij}(u) \tag{7·50}$$

は明らかに，このような**角計量**に対して一意に定まるものであるから，われわれはこのような相対テンソル，すなわち重さ $-2/n$ で正値な共変対称テンソル $G_{ij}(u)$ でかつ $|G_{ij}(u)|=1$ であるものが X に角計量を定義するものと考えることができる．

角計量が与えられた n 次元多様体 X に対して，共形的接ベクトル・バンドル $\mathfrak{F}_0$ を座標変換 (7·44) で定義し，$\mathfrak{F}$ の基本共形テンソルが平行となる接続 Γ が，$\mathfrak{F}_0$ の座標函数が定める標構をこの接続の Veblen 標構とするように与えられたとき，$\mathfrak{Q}_0$ に共形接続が定義される．このような共形接続が与えられた多様体 X を**共形接続空間**という．

$\mathfrak{F}$ の接続 Γ の曲率形式，誘導バドンル $\tilde{\pi}^{\#}\mathfrak{F}$ における Γ から誘導される接続 $\tilde{\Gamma}$ の曲率形式等が第4章の推論に従って，射影空間のときと全く同様に論ずることができる．$\mathfrak{F}$ の各座標函数 φ_U は Γ に関して Veblen 標構であると仮定する．$\mathfrak{F}_0$ の連合主ファイバー・バンドル $\tilde{\mathfrak{F}}_0, \mathfrak{F}$ の連合主ファイバー・バンドル $\tilde{\mathfrak{F}}$ として，それぞれの座標函数を $\tilde{\varphi}_U^0, \tilde{\varphi}_U$ とする．$\tilde{\mathfrak{F}}=\{B, X, \tilde{\pi}, GL(n+2)\}$ に対して，B 上の微分形式系 θ_α^β が 4·6 によって定義される．容易にわかるように $\tilde{\mathfrak{F}}_0$ は $\tilde{\mathfrak{F}}$ の部分バンドルと考えることができる．誘導バンドル $\tilde{\pi}^{\#}\mathfrak{F}$ の $n+2$ 個の切断 $\mathfrak{z}_\alpha$ を $\tilde{\pi}_0{}^{\#}\mathfrak{F}_0$ のバンドル空間 B_0 に制限したものを $R_\alpha=\mathfrak{z}_\alpha|B_0$ とおき，θ_α^β を B_0 で考えれば，古典的には動標構に対する微分として知られている $\tilde{\pi}^{\#}\mathfrak{F}_0$ に関する共変微分の公式

$$\tilde{D}R_\alpha=R_\beta\otimes\theta_\alpha^\beta$$

が導かれる．とくに座標近傍 (U, u) においては，a_α^β が (7·22) をみたすので θ_0^β は

$$\theta_0^0 = b_\gamma^0(da_0^\gamma + \omega_\rho^\gamma a_0^\rho) = d\log a_0^0 + \omega_0^0 + b_i^0 \omega_0^i a_0^0$$

$$\theta_0^j = b_\gamma^j(da_0^\gamma + \omega_\rho^\gamma a_0^\rho) = b_k^j \omega_0^k a_0^0$$

の形に表わされる．接続 Γ の曲率形式はこの座標近傍で

$$\Omega_\alpha^\beta = d\omega_\alpha^\beta + \omega_\gamma^\beta \wedge \omega_\alpha^\gamma \tag{7·51}$$

であるが，(7·29)′ と (7·36) を代入すれば

$$\begin{aligned} &\Omega_0^0 = \omega_i^0 \wedge du^i, \qquad \Omega_0^j = \omega_k^j \wedge du^k \\ &\Omega_i^j = d\omega_i^j + \omega_k^j \wedge \omega_i^k + du^j \wedge \omega_i^0 + L^{jh} L_{ki} \omega_h^0 \wedge du^k \\ &\Omega_i^0 = d\omega_i^0 + \omega_h^0 \wedge \omega_i^h \end{aligned} \tag{7·52}$$

および

$$\Omega_0^\infty = \Omega_\infty^0 = \Omega_0^0 + \Omega_\infty^\infty = 0, \quad \Omega_i^\infty = L_{ik}\Omega_0^k, \quad \Omega_\infty^i = L^{ik}\Omega_k^0 \tag{7·53}$$

である．したがって

$$\omega_\alpha^\beta = \Pi_{k\alpha}^\beta du^k, \qquad \Omega_\alpha^\beta = \frac{1}{2} F_\alpha{}^\beta{}_{hk} du^h \wedge du^k, \qquad F_\alpha{}^\beta{}_{hk} = -F_\alpha{}^\beta{}_{kh}$$

とおけば，$F_\alpha{}^\beta{}_{hk}$ は

$$\begin{aligned} &F_0{}^0{}_{hk} = \Pi_{hk}^0 - \Pi_{kh}^0, \qquad F_0{}^j{}_{hk} = \Pi_{hk}^j - \Pi_{kh}^j \\ &F_i{}^j{}_{hk} = \frac{\partial \Pi_{ki}^j}{\partial u^h} - \frac{\partial \Pi_{hi}^j}{\partial u^k} + \Pi_{hl}^j \Pi_{ki}^l - \Pi_{kl}^j \Pi_{hi}^l + \delta_h^j \Pi_{ki}^0 - \delta_k^j \Pi_{hi}^0 \\ &\qquad\qquad + L^{jl} L_{ik} \Pi_{hl}^0 - L^{jl} L_{ih} \Pi_{kl}^0 \\ &F_i{}^0{}_{hk} = \frac{\partial \Pi_{ki}^0}{\partial u^h} - \frac{\partial \Pi_{hi}^0}{\partial u^k} + \Pi_{hl}^0 \Pi_{ki}^l - \Pi_{kl}^0 \Pi_{hi}^l \end{aligned} \tag{7·54}$$

と表わされる．$\mathfrak{F}$ の接続 Γ の曲率形式 Ω_α^β は共形的な混合テンソル微分形式であるが，これに対して座標近傍 U と V の共通部分 $U \cap V$ では

$$\Omega_U{}_\alpha^\beta = (b_\gamma^\beta \cdot g_{VU}) \Omega_V{}_\delta^\gamma (a_\alpha^\delta \cdot g_{VU})$$

なる関係が成り立つ．これは (7·23)′ を代入すれば

$$\Omega_U{}_0^0 = \Omega_V{}_0^0, \qquad \Omega_U{}_0^j = \frac{\partial u^j}{\partial v^k} \Omega_V{}_0^k,$$

$$\Omega_{U}{}^{j}_{i}=\frac{\partial u^j}{\partial v^k}\left\{\Omega_{V}{}^{k}_{h}\frac{\partial v^h}{\partial u^i}+\Omega_{V}{}^{k}_{0}\frac{\partial\log\Delta(v,u)^{-W}}{\partial u^i}+\frac{\partial\log\Delta(u,v)^{-W}}{\partial v^h}L^{hk}(v)\Omega_{V}{}^{\infty}_{l}\frac{\partial v^l}{\partial u^i}\right\} \tag{7·55}$$

$$\Omega_{U}{}^{0}_{i}=\Omega_{V}{}^{0}_{h}\frac{\partial v^h}{\partial u^i}+\frac{\partial\log\Delta(u,v)^{-W}}{\partial v^k}\left\{(\Omega_{V}{}^{k}_{h}-\delta^k_h\Omega_{V}{}^{0}_{0})\frac{\partial v^h}{\partial u^i}+\right.$$
$$\left.+\Omega_{V}{}^{k}_{0}\frac{\partial\log\Delta(v,u)^{-W}}{\partial u^i}+\frac{1}{2}\frac{\partial\log\Delta(u,v)^{-W}}{\partial v^l}L^{lk}(v)\Omega_{V}{}^{\infty}_{h}\frac{\partial v^h}{\partial u^i}\right\}$$

である．Γ が $\mathfrak{P}$ に定める射影的接続の曲率形式は前章と同じ推論によって $\Omega^\beta_\alpha-\delta^\beta_\alpha\Omega^0_0$ であるが，さらにこの射影的接続を $\mathfrak{P}_0$ の部分バンドル $\mathfrak{Q}_0$ にかぎったものが共形接続であるから，この2次の微分形式系を与えられた共形接続の曲率形式とよぶ．ところが上に求めた関係から $\Omega^\beta_\alpha-\delta^\beta_\alpha\Omega^0_0$ もまた共形的混合テンソル微分形式であることがわかる．これを**共形的曲率形式**とよぼう．したがって $F_\alpha{}^\beta{}_{hk}-\delta^\beta_\alpha F_0{}^0{}_{hk}$ は α,β について共形的，h,k について擬似的性質をもつ．この $\mathfrak{F}_0{}^*\otimes\mathfrak{F}_0\otimes T^*(X)\otimes T^*(X)$ の切断として定まる一般的テンソル場を**共形曲率テンソル**という．(7·55) は Ω^j_0 が X の自然標構に関するある反変接ベクトル微分形式の成分を表わしていることを示している．Ω^j_0 は与えられた接続の Veblen 標構について定まったのであるが，Veblen 標構同志は (7·37) によって関連しあうから，Veblen 標構の選び方に無関係に定まることが容易に証明できる．これを共形接続空間の**捩率形式**，$F_0{}^i{}_{hk}$ によって定義される接テンソルを**捩率テンソル**という．

捩率テンソルが0である共形接続空間をわれわれは**対称共形接続空間**とよび，さらに共形曲率テンソルが0であれば，**共形的に局所平坦**であるという．対称共形接続空間では

$$\Omega^j_0=\Omega^\infty_i=0 \tag{7·56}$$

であるから，(7·55) は

$$\Omega_{U}{}^{0}_{0}=\Omega_{V}{}^{0}_{0},\qquad \Omega_{U}{}^{j}_{i}=\frac{\partial u^j}{\partial v^k}\Omega_{V}{}^{k}_{h}\frac{\partial v^h}{\partial u^i}$$

$$\Omega_{U_i}^{\ 0} = \Omega_{V_h}^{\ 0} \frac{\partial v^h}{\partial u^i} + \frac{\partial \log \Delta(u,v)^{-W}}{\partial v^k} (\Omega_{V_h}^{\ k} - \delta_h^k \Omega_{V_0}^{\ 0}) \frac{\partial v^h}{\partial u^i} \tag{7·57}$$

となって，しかもこの場合座標近傍 (U,u) において Veblen 標構を他の Veblen 標構にとりかえても，$\Omega_{U_i}^{\ j}$ はもとのままである．したがってこの Ω_i^j は X の混合接テンソル微分形式であって，$F_i{}^j{}_{hk}$ は X の（擬似）接テンソルの成分をなす．

定理 7·2 捩率をもたない共形接続空間は，$n>3$ のとき $\Omega_i^j-\delta_i^j\Omega_0^0=0$ ならば共形的に局所平坦である．

（証明） 一般に共形接続空間の Bianchi の恒等式は

$$d(\Omega_\alpha^\beta-\delta_\alpha^\beta\Omega_0^0)-(\Omega_\gamma^\beta-\delta_\gamma^\beta\Omega_0^0)\wedge\omega_\alpha^\gamma+\omega_\gamma^\beta\wedge(\Omega_\alpha^\gamma-\delta_\alpha^\gamma\Omega_0^0)$$
$$+\delta_\alpha^\beta(\Omega_k^0\wedge\omega_0^k-\omega_k^0\wedge\Omega_0^k)=0 \tag{7·58}$$

であるから，捩率をもたないとすれば，この関係式は

$$(\Omega_k^j-\delta_k^j\Omega_0^0)\wedge du^k=0$$
$$d(\Omega_i^j-\delta_i^j\Omega_0^0)-(\Omega_k^j-\delta_k^j\Omega_0^0)\wedge\omega_i^k-\Omega_\infty^j\wedge\omega_i^\infty \tag{7·58$'$}$$
$$+\omega_k^j\wedge(\Omega_i^k-\delta_i^k\Omega_0^0)+du^j\wedge\Omega_i^0+\delta_i^j\Omega_k^0\wedge du^k=0$$
$$d\Omega_i^0-\Omega_k^0\wedge\omega_i^k+\omega_k^0\wedge(\Omega_i^k-\delta_i^k\Omega_0^0)=0$$

となる．したがってさらに $\Omega_i^j-\delta_i^j\Omega_0^0=0$ と仮定すれば

$$-\Omega_\infty^j\wedge\omega_i^\infty+du^j\wedge\Omega_i^0+\delta_i^j\Omega_k^0\wedge du^k=0$$
$$d\Omega_i^0-\Omega_k^0\wedge\omega_i^k=0$$

となってしまう．はじめの式で $i=j$ とおいて縮合すれば (7·29)$'$ と (7·53) によって

$$n\Omega_k^0\wedge du^k=0$$

が出る．よって

$$\Omega_\infty^j\wedge du^i-du^j\wedge\Omega_\infty^i=0.$$

したがって任意の i,j の組に対して

$$(\Omega_\infty^j\wedge du^j)\wedge du^i=0$$

が出る．$n>3$ であれば U における3次の微分形式 $\Omega^j_\infty\wedge du^j$ は

$$\Omega^j_\infty\wedge du^j=0$$

でなければならない．よって

$$\Omega^j_\infty=\tau^j\wedge du^j$$

の形である．τ^j は U における微分形式を表わす．これを前に出た式に代入して

$$\tau^j\wedge du^j\wedge du^i-\tau^i\wedge du^i\wedge du^j=(\tau^j+\tau^i)\wedge du^j\wedge du^i=0.$$

したがって相異なる i と j に対して $\tau^i+\tau^j$ は du^i と du^j のみの一次式である．よって τ^j は添字 j 以外の任意の二つの添字 i, k をとれば du^i, du^j, du^k の一次式でなければならなくなって，$n>3$ なることから du^j のみで表わされることが出る．したがって $\Omega^j_\infty=0$ が $\tau^j\wedge du^j=0$ から出る．任意の α, β に対して $\Omega^\beta_\alpha-\delta^\beta_\alpha\Omega^0_0=0$ となったから，この空間は共形的に局所平坦である．（終）

定理 7·3　共形的に局所平坦な共形接続空間は局所的に共形空間と同等である．

（証明）容易にわかるように，X の任意の点 x_0 の近傍で $\Omega^0_0=-d\omega$ となる微分形式 ω がある．$\mathfrak{F}$ の接続 Γ とこの近傍において射影的に同等な接続 $\bar{\Gamma}$ でその曲率形式 $\bar{\Omega}^\beta_\alpha$ が0となるものがある．よってはじめから $\Omega^\beta_\alpha=0$ と仮定しよう．ただし基本共形テンソル L の微分は $DL=-2L\otimes\omega$ とする．このとき $\Theta^\beta_\alpha=d\theta^\beta_\alpha+\theta^\beta_\gamma\wedge\theta^\gamma_\alpha=0$ となるから Pfaff 方程式系

$$dR'_\alpha-R'_\beta\theta^\beta_\alpha=0$$

は完全積分可能である．x_0 の座標近傍 U を適当に小さくとれば，$\tilde{\pi}_0^{-1}(U)$ から P^{n+1} の座標系を定める R^{n+2} の基 (R'_0, R'_i, R'_∞) の集まり $GL(n+2)$ の中への写像 f がこの方程式の解から定まる．$L_{\alpha\beta}(x_0)=a_{\alpha\beta}$ とおいて R^{n+2} の内積を，f によって $(z_\alpha(x_0))$ に対応する $(R_\alpha'(x_0))$ を用いて

$$R'_\alpha(x_0)\cdot R'_\beta(x_0)=a_{\alpha\beta}$$

なるように定義すれば，$(R'_0, R'_i, R'_\infty)=f(b), b\in\tilde{\pi}_0^{-1}(U)$ に対する

$$R'_\alpha \cdot R'_\beta = L'_{\alpha\beta}$$

は次の関係式

$$dL'_{\alpha\beta} - L'_{\gamma\beta}\theta^\gamma_\alpha - L'_{\alpha\gamma}\theta^\gamma_\beta = 0$$

をみたす．他方 $\mathfrak{F}_0$ の基本共形テンソル L から誘導される $\tilde{\pi}_0{}^{\#}(\mathfrak{F}_0)$ の基本共形テンソルを $\tilde{L}$ とすれば $\tilde{D}\tilde{L} = -2\tilde{L}\otimes\omega$ となるから

$$d\tilde{L}_{\alpha\beta} - \tilde{L}_{\gamma\beta}\theta^\gamma_\alpha - \tilde{L}_{\alpha\gamma}\theta^\gamma_\beta = -2\tilde{L}_{\alpha\beta}\omega$$

したがって $L'_{\alpha\beta}$ と $\tilde{L}_{\alpha\beta}$ とは互に比例する成分をもつ．よって (R'_0, R'_i, R'_∞) は P^{n+1} の二次超曲面

$$Q^n \ : \ a_{\alpha\beta}y^\alpha y^\beta = a_{ij}y^i y^j - 2y^0 y^\infty = 0$$

上の二点，そこでの接超平面の交わり上に他の基礎点をもつような射影座標系を与える R^{n+2} の基をなしている．したがってこの対応 f によって U_0 は Q^n 上の x_0 の対応点の近傍と共形的に同型的な対応がつくと見なすことができる．(終)

局所平坦な共形接続空間は Möbius 空間 M^n と位相同型のとき，単に**平坦**であるという．

7·4 標準共形接続空間

前節の推論によって，捩率をもたない共形接続空間では座標近傍 (U, u) において Veblen 標構のとり方にかかわらず Ω^0_0, Ω^j_i は共通で，後者は X の擬似混合テンソル微分形式であった．したがって次の条件

$$F_i{}^h{}_{jh} = \delta^h_i F_0{}^0{}_{hj} = F_0{}^0{}_{ij} \tag{7·59}$$

は捩率をもたない共形接続空間の構造に対する条件である．捩率をもたないので (7·29) と (7·54) とから

$$L_{kj}\Pi^k_{hi} + L_{ik}\Pi^k_{hj} = \frac{\partial L_{ij}}{\partial u^h},$$

$$\Pi^k_{ij} = \Pi^k_{ji}$$

である．これを Π^k_{ji} について解けば

$$\Pi^k_{ji}=\frac{1}{2}L^{kh}\left(\frac{\partial L_{jh}}{\partial u^i}+\frac{\partial L_{hi}}{\partial u^j}-\frac{\partial L_{ji}}{\partial u^h}\right)$$

を得る．さらに

$$K_i{}^j{}_{hk}=\frac{\partial \Pi^j_{ki}}{\partial u^h}-\frac{\partial \Pi^j_{hi}}{\partial u^k}+\Pi^j_{hl}\Pi^l_{ki}-\Pi^j_{kl}\Pi^l_{hi}$$

$$K_{ik}=K_i{}^h{}_{hk}$$

とおいて，(7·59) から

$$K_{ik}+(n-1)\Pi^0_{ki}-\Pi^0_{ik}+L^{lh}\Pi^0_{lh}L_{ik}=0$$

が出る．明らかに $K_{ik}=K_{ki}$ であるから

$$\Pi^0_{ki}=\Pi^0_{ik} \tag{7·60}$$

を得る．したがって上の式は

$$K_{ik}+(n-2)\Pi^0_{ki}+L^{lh}\Pi^0_{lh}L_{ik}=0$$

となる．これに L^{ik} を乗じて縮合すると

$$K+2(n-1)L^{ik}\Pi^0_{ik}=0,\qquad K=L^{ik}K_{ik}$$

すなわち

$$\Pi^0_{ki}=-\frac{1}{n-2}K_{ki}+\frac{1}{2(n-1)(n-2)}KL_{ki} \tag{7·61}$$

となって Π^0_{ki} が決定する．以上から角計量を与えられた n 次元多様体に対して，捩率をもたない共形接続空間が条件(7·59)をみたすように一意に決定することが証明された．このような空間を**標準共形接続空間**とよぶ．X に Riemann 計量が与えられたとき，その基本テンソルの成分を g_{ij} とすれば $L_{ij}=g_{ij}$ とおけるから，g_{ij} からつくった Christoffel の記号を $\left\{{j \atop ki}\right\}$ で表わせば，$\Pi^j_{ki}=\left\{{j \atop ki}\right\}$ となる．この Riemann 空間の曲率テンソルの成分を $R_i{}^j{}_{hk}$ で表わして

$$F_i{}^j{}_{hk}=R_i{}^j{}_{hk}-\frac{1}{n-2}(R_{ik}\delta^j_h-R_{ih}\delta^j_k+g_{ik}R^j_h-g_{ih}R^j_k)$$
$$+\frac{R}{(n-1)(n-2)}(g_{ik}\delta^j_h-g_{ih}\delta^j_k)$$

を得る．Riemann 空間の基本テンソルの共形変換 $g_{ij}\to\sigma g_{ij}$ $(\sigma>0)$ に関して不変なテンソルとして有名な **Weyl の共形テンソル**の成分を $F_i{}^j{}_{hk}$ が表わすことを示している．なお (7·60) により標準共形接続空間では $\Omega_0^0=0$ となるので共形曲率テンソルの成分のうち $F_i{}^j{}_{hk}-\delta_i^j F_0{}^0{}_{hk}$ が Weyl の共形テンソルの成分に一致することがわかる．Weyl の共形テンソルに対しては $n=3$ の場合にはつぎの定理が成り立つ．

定理 7·4 3次元 Riemann 空間の Weyl の共形テンソルは恒等的に 0 である．

(証明) Weyl の共形テンソルの成分 $F_i{}^j{}_{hk}$ は (7·60) によって

$$F_i{}^h{}_{hj}=0 \tag{7·59)'}$$

をみたし，また Riemann の曲率テンソルの成分 R_{ijhk} の性質によって

$$F_{ijhk}=g_{jl}F_i{}^l{}_{hk}$$

とおけば

$$F_{ijhk}=-F_{jihk}=-F_{ijkh},\qquad F_{ijhk}=F_{hkij}$$

が成り立つ．$F_i{}^j{}_{hk}$ のテンソル性によって，任意の点において $g_{ij}=\delta_{ij}$ と考えて証明しても構わない．$n=3$ として (7·59)′ から

$$F_{3131}+F_{1212}=0,\qquad F_{3112}=0$$
$$F_{1212}+F_{2323}=0,\qquad F_{1223}=0$$
$$F_{2323}+F_{3131}=0,\qquad F_{2331}=0$$

が出る．これからただちに

$$F_{ijhk}=0$$

を得る．(終)

前節の定理 7·2 とこの定理によって，標準共形接続空間においては $n>3$ なら Weyl の共形テンソルが，$n=3$ ならば J. M. Thomas によって**共形的共変式**とよばれた $F_i{}^0{}_{hk}$ がそれぞれ基本的役目を演ずることがわかる．

7·5 共 形 円

共形接続空間 X の中の曲線 C が写像 $f: I\to X$ で表わされたとする．

$\tilde{\pi}_0^{-1}(C)$ から B の中への挿入写像を ι として $\iota^*\theta_\alpha^\beta=\pi_\alpha^\beta$ とおけば

$$d\pi_\alpha^\beta+\pi_\gamma^\beta\wedge\pi_\alpha^\gamma=0$$

となる．しかるとき Pfaff 方程式系

$$dR'_\alpha=R'_\beta\pi_\alpha^\beta \tag{7·62}$$

が完全積分可能である．ところで

$$\theta_0^0=d\log a_0^0+b_i^0\omega_0^i a_0^0,\qquad \theta_0^j=b_k^j\omega_0^k a_0^0,\qquad \theta_0^\infty=0$$

であるから R'_0/a_0^0 は t のみに関係する．したがって R'_0 が P^{n+1} の中に定める点は曲線 C′ を定める．7·3 で述べたように，この曲線 C′ は二次超曲面 Q^n 上にあって，しかも Q^n を不変にする射影変換を除いて定まる．Q^n は 7·1 で述べたように Möbius 空間 M^n と同等であるから，C′ は M^n の中の曲線と考えてもよろしい．この C′ を C の展開という．C′ が円のとき，C はこの共形接続空間における**共形円**とよばれる．

Riemann 計量を与えられた多様体 X からつくった共形接続空間における共形円の微分方程式を導いてみよう．Riemann 計量 g_{ij} による Veblen 標構を用いることにし，座標近傍 (U,u) において $\omega_\alpha^\beta=\Gamma_{k\alpha}^\beta du^k$ とおくと，前節で述べたように $\Gamma_{ki}^j=\left\{\begin{matrix} j \\ ki\end{matrix}\right\}$ である．C の展開 C′ が円であるためには

$$R'_0,\quad \frac{d}{dt}R'_0,\quad \frac{d^2}{dt^2}R'_0,\quad \frac{d^3}{dt^3}R'_0$$

が一次従属であることである．C′ の射影的媒介変数 σ を用いると 7·1 から

$$\frac{d^3}{d\sigma^3}\rho R'_0=0$$

である函数 ρ がある．計算の結果

$$\frac{dR'_0}{dt}=R'_i\frac{du^i}{dt},$$

$$\frac{d^2R'_0}{dt^2}=R'_0\Gamma_{kh}^0\frac{du^k}{dt}\frac{du^h}{dt}+R'_i\frac{\delta^2u^i}{dt^2}+R'_\infty g_{kh}\frac{du^k}{dt}\frac{du^h}{dt} \tag{7·63}$$

$$\frac{d^3R'_0}{dt^3}=R'_0\left\{\frac{d}{dt}\left(\Gamma^0_{kh}\frac{du^k}{dt}\frac{du^h}{dt}\right)+\Gamma^0_{kh}\frac{du^k}{dt}\frac{\delta^2u^h}{dt^2}\right\}$$

$$+R'_i\left\{\frac{\delta^3u^i}{dt^3}+\frac{du^i}{dt}\Gamma^0_{kh}\frac{du^k}{dt}\frac{du^h}{dt}+\Gamma^i_{k\infty}\frac{du^k}{dt}g_{jh}\frac{du^j}{dt}\frac{du^h}{dt}\right\}$$

$$+3R'_\infty g_{kh}\frac{du^k}{dt}\frac{\delta^2u^h}{dt^2}$$

を得る．ただし $\dfrac{\delta}{dt}$ は $\left\{\begin{matrix} j \\ ki \end{matrix}\right\}$ で定まる Levi-Civita の接続による共変微分を表わす．媒介変数 t として C の弧長 s を用いれば

$$g_{kh}\frac{du^k}{ds}\frac{du^h}{ds}=1,\qquad g_{kh}\frac{du^k}{ds}\frac{\delta^2u^h}{ds^2}=0$$

であるから，共形円であるための条件は

$$\frac{d^3R'_0}{ds^3}=\psi\frac{dR'_0}{ds}+\varphi R'_0$$

なる ψ,φ があることになる．したがって

$$\frac{\delta^3u^i}{ds^3}+\frac{du^i}{ds}\Gamma^0_{kh}\frac{du^k}{ds}\frac{du^h}{ds}+\Gamma^i_{k\infty}\frac{du^k}{ds}=\psi\frac{du^i}{ds}.$$

しかるに

$$g_{kh}\frac{\delta^2u^k}{ds^2}\frac{\delta^2u^h}{ds^2}=-g_{kh}\frac{du^k}{ds}\frac{\delta^3u^h}{ds^3}$$

であるから，これに上の式を代入して

$$\psi=2\Gamma^0_{kh}\frac{du^k}{ds}\frac{du^h}{ds}-g_{kh}\frac{\delta^2u^k}{ds^2}\frac{\delta^2u^h}{ds^2}$$

が出る．よって共形円を与える微分方程式は

$$\frac{\delta^3u^i}{ds^3}+\left(g_{kh}\frac{\delta^2u^k}{ds^2}\frac{\delta^2u^h}{ds^2}-\Gamma^0_{kh}\frac{du^k}{ds}\frac{du^h}{ds}\right)\frac{du^i}{ds}+\Gamma^i_{k\infty}\frac{du^k}{ds}=0 \quad (7\cdot64)$$

となる．一方

$$\left(\frac{d\sigma}{ds}\right)^3\frac{d^3}{d\sigma^3}(\rho R'_0)=\left(R'_0\frac{d^3\rho}{ds^3}+3\frac{dR'_0}{ds}\frac{d^2\rho}{ds^2}+3\frac{d^2R'_0}{ds^2}\frac{d\rho}{ds}+\frac{d^3R'_0}{ds^3}\rho\right)$$

$$-3\left(R'_0\frac{d^2\rho}{ds^2}+2\frac{dR'_0}{ds}\frac{d\rho}{ds}+\frac{d^2R'_0}{ds^2}\rho\right)\frac{d^2\sigma}{ds^2}\Big/\frac{d\sigma}{ds}$$

$$-\left(R'_0\frac{d\rho}{ds}+\frac{dR'_0}{ds}\rho\right)\left\{\left(\frac{d^3\sigma}{ds^3}\Big/\frac{d\sigma}{ds}\right)-3\left(\frac{d^2\sigma}{ds^2}\Big/\frac{d\sigma}{ds}\right)^2\right\}=0$$

から

$$\rho=\frac{d\sigma}{ds} \tag{7·65}$$

と考えてよろしいことがわかる．$\dfrac{dR_0'}{ds}$ の係数からただちに

$$3\frac{d^3\sigma/ds^3}{d\sigma/ds}-6\left(\frac{d^2\sigma/ds^2}{d\sigma/ds}\right)^2-\left(\frac{d^3\sigma/ds^3}{d\sigma/ds}-3\left(\frac{d^2\sigma/ds^2}{d\sigma/ds}\right)^2\right)+\psi=0$$

が出る．この式と上に求めた ψ を表わす式から，**共形円の射影的媒介変数 σ** に対する微分方程式は Schwarz の微分を用いて書けば

$$\{\sigma, s\}=\frac{1}{2}g_{kh}\frac{\delta^2u^k}{ds^2}\frac{\delta^2u^h}{ds^2}-\Gamma^0_{kh}\frac{du^k}{ds}\frac{du^h}{ds} \tag{7·66}$$

となることがわかる．なお，上に求めた $d^3(\rho R'_0)/d\sigma^3$ の右辺の R'_0 の係数からは σ を規定する別の式が出てこないことが計算の結果わかる．

標準共形接続空間の場合には，(7·61) によって共形円の方程式 (7·64) は

$$\frac{\delta^3u^i}{ds^3}+g_{kh}\frac{\delta^2u^k}{ds^2}\frac{\delta^2u^h}{ds^2}\frac{du^i}{ds}+\frac{1}{n-2}\left(R_{kh}\frac{du^k}{ds}\frac{du^h}{ds}\frac{du^i}{ds}-R^i_k\frac{du^k}{ds}\right)=0 \tag{7·64)$'$($$

と表わすことができる．与えられた Riemann 計量をもつ Riemann 空間において曲線 C に対する **Frenet の公式**

$$\frac{du^i}{ds}=\xi^i_{(1)},\qquad \frac{\delta}{ds}\xi^i_{(1)}=\kappa_1\xi^i_{(2)},\qquad \frac{\delta}{ds}\xi^i_{(2)}=-\kappa_1\xi^i_{(1)}+\kappa_2\xi^i_{(3)}$$

$$\frac{\delta}{ds}\xi^i_{(\alpha)}=-\kappa_{(\alpha-1)}\xi^i_{(\alpha-1)}+\kappa_\alpha\xi^i_{(\alpha+1)},\qquad \alpha=3,\cdots$$

を上の関係式に代入すると

$$\xi^i_{(3)}\kappa_1\kappa_2+\xi^i_{(2)}\frac{d}{ds}\kappa_1+\frac{1}{n-2}(R_{kh}\xi^k_{(1)}\xi^h_{(1)}\xi^i_{(1)}-R^i_k\xi^k_{(1)})=0 \tag{7·64)$''$($$

が出る．さて Riemann 空間において κ_1＝定数，$\kappa_2=0$ である曲線，すなわち接ユークリッド空間での展開が円となるものは **Riemann 円**とよばれる

共形円 C がつねに Riemann 円であるための条件は (7·64)″ から，任意の単位接ベクトル ξ^i に対して

$$R_{kh}\xi^k\xi^h\xi^i = R^i_k\xi^k$$

であることである．R^i_k は δ^i_k に比例しなければならない．したがって

$$R_{ij} = \frac{R}{n} g_{ij} \tag{7·67}$$

であることが，そのための条件となる．よって次の定理が証明された．

定理 7·5 Riemann 空間において，Riemann 円が共形円と一致するための必要かつ十分な条件は，それが Einstein 空間であることである．

7·6 ホロノミー群

ホロノミー群が接点を含まない一つの超球面を不変にするような共形接続空間の性質を調べよう．この空間には，その共形接続に従って互に重なるような接Möbius 空間 M^n_x 内の超球面 R_x の場が定まる．任意の座標近傍 (U, u) において Veblen 標構を用い R_x が $z_\alpha\xi^\alpha$ $(z_\alpha = z_{(U)\alpha})$ と表わされたとすれば

$$d\xi^\beta + \omega^\beta_\alpha\xi^\alpha = \omega\xi^\beta \tag{7·68}$$

が成り立つ U 上の微分形式 ω が存在しなければならない．接点 $z_0(x)$ は R_x にのっていないから $L_{0\alpha}\xi^\alpha = -\xi^\infty \neq 0$ である．したがって $\xi^\infty = 1$ としても構わない．しかるとき

$$\xi_\alpha = L_{\alpha\beta}\xi^\beta \tag{7·69}$$

とおけば，(7·68) は

$$d\xi_\alpha - \xi_\beta\omega^\beta_\alpha = \xi_\alpha\omega \tag{7·68$'$}$$

となる．詳しく書けばこれは

$$\omega = \xi_i du^i, \qquad d\xi_\infty - \xi_k\omega^k_\infty = \xi_\infty\omega$$

$$\omega^0_i = -(d\xi_i - \xi_k\omega^k_i) + (\xi_\infty L_{ik} + \xi_i\xi_k)du^k \tag{7·70}$$

となる．(7·52) から

$$\Omega^0_0 = \omega^0_i \wedge du^i = -d(\xi_i du^i) + \xi_k\omega^k_i \wedge du^i,$$

すなわち

$$d(\xi_i du^i)=\xi_k\Omega_0^k-\Omega_0^0 \tag{7·71}$$

が成立する．さらに (7·68′) の外微分から

$$\xi_\beta\Omega_\alpha^\beta+\xi_\alpha(\xi_k\Omega_0^k-\Omega_0^0)=0 \tag{7·72}$$

が出る．

この空間が標準共形接続空間であると仮定すれば $d(\xi_i du^i)=0$ となるので

$$\xi_i du^i=d\log\sigma$$

である函数 σ が存在する．Veblen 標構の変換

$$\bar{z}_\alpha=z_\beta p_\alpha^\beta$$

を，この函数 σ を用いて (7·37) によって定義される変換 $\tilde{\sigma}=(p_\alpha^\beta)$ とすれば，R_x が $\bar{z}_\alpha\bar{\xi}^\alpha$ で表わされたとして

$$\bar{\xi}_\alpha=\bar{L}_{\alpha\beta}\bar{\xi}^\beta=\xi_\beta p_\alpha^\beta$$

$$\bar{L}_{ij}=\sigma^2 L_{ij},\qquad \bar{L}_{00}=\bar{L}_{0i}=\bar{L}_{i\infty}=\bar{L}_{\infty\infty}=0,\qquad \bar{L}_{0\infty}=-1$$

となるから

$$\bar{\xi}_i=\xi_\beta p_i^\beta=-p_i^0+\xi_k p_i^k=\sigma\left(-\frac{\partial\log\sigma}{\partial u^i}+\xi_i\right)=0$$

$\xi_i=0$ となるような Veblen 標構は (7·37) で σ を定数にとった変換で互にうつりあうことは以上の推論からも明らかである．このような Veblen 標構を用いれば，(7·70) は

$$\omega=0,\qquad d\xi_\infty=0,\qquad \omega_i^0=\xi_\infty L_{ik}du^k$$

となるから，(7·61) によって

$$K_{ij}=\left(\frac{K}{2(n-1)}-(n-2)c\right)L_{ij},\qquad \xi_\infty=c=\text{定数} \tag{7·73}$$

が出る．ところでこの場合

$$K=L^{ij}K_{ij}=\frac{n}{2(n-1)}K-n(n-2)c$$

が成立しなければならないから

$$c=-\frac{K}{2n(n-1)}$$

である．よって超球面 R_x は

$$L_{\alpha\beta}\xi^{\alpha}\xi^{\beta}=L^{\alpha\beta}\xi_{\alpha}\xi_{\beta}=-2\xi_0\xi_{\infty}=2\xi_{\infty}=2c$$

が正か負かに従って実か虚である．0 ならば点である．以上から Riemann 空間に関する次の定理を得る．

定理 7·6 Riemann 空間からつくった標準共形接続空間のホロノミー群が共形変換群の部分群で，接点を含まない一超球面を不変にするとき，これが実か虚か点球面かに従って，与えられた Riemann 空間はスカラー曲率が負か正かまたは 0 である Einstein 空間と局所的に共形的であり，逆も成立する．もし空間が単連結の場合には，一つの Einstein 空間と共形的である．

さらに (7·72) から

$$\Omega_0^0=0, \qquad \Omega_i^0=\xi_{\infty}L_{ik}\Omega_0^k$$

となるから

$$\Omega_i^0=0$$

が出る．したがって定理 7·4 とあわせると次の定理が成立する．

定理 7·7 標準共形接続空間のホロノミー群が接点を含まない一超球面を不変にすれば，その共形的共変式 $F_i{}^0{}_{hk}$ が 0 となる．とくに 3 次元の場合には共形的に局所平坦でなければならない．

参 考 文 献

接続幾何学の参考書について述べる．基礎として

[1] C. Chevalley, Theory of Lie Groups I, Princeton, 1946.

[2] N. Steenrod, The topology of fibre bundles, Princeton, 1951.

[3] E. Cartan, Les systéme différentiels exterieurs et leurs applications géométriques, Act. Sci. Ind., 994, Hermann, Paris, 1945.

をあげておこう．古典的接続幾何学全般を詳しく述べてあるものとして

[4] J. A. Schouten, D. J. Struik, Einführung in die neueren Methoden der Differentialgeometrie Ⅰ, Ⅱ, Groningen-Batavia, Noordhoff, 1935, 1938.

[5] L. P. Eisenhart, Non-Riemannian Geometry, Amer. Math. Soc., 1927.

動標構による E. Cartan の方法を用いて歴史的面にもふれ，わかり易く述べてあるものとして

[6] 矢野健太郎，接続の幾何学，河出書房，1947.

をあげておく．

擬似接続幾何学と射影接続幾何学に対してはそれぞれ

[7] S. S. Chern, Lecture note on differential geometry I, Chicago, 1955.

[8] E. Cartan, Leçon sur la géométrie des espaces á connexion projective, Paris, Gauthier-Villars, 1938.

をあげるが，前者は本書の第5章を書くにあたり大いに参考となった．共形接続幾何学はつぎが詳しい．

[9] 佐々木重夫，共形接続幾何学，河出書房，1948.

ファイバー・バンドルを用いて新しい方法で一般の接続幾何学を論じたものに

[10] S. S. Chern, Topics in differential geometry, Institute for Advanced Study, Princeton, 1951.

[11] K. Nomizu, Lie groups and differential geometry, Publications of Math. Soc. Japan, No. 2, 1956.

がある．前者は微分形式を基本にしており，少しく難解であるが，後者はベクトル場を基本として論じてあって新しい微分幾何学を知るに手頃な本である．

本書ではふれなかったが，接続幾何学における Lie 微分は色々と有力な利用面をもっている．これに対しては次の書物がある．

[12] K. Yano, Groups of transformations in generalized spaces, Academia Press, Tokyo, 1949.

最後に単行本ではないが以下はホロノミー群について最近の結果と新しい微分幾何学の方法を知るに適当である．

[13] W. Ambrose, I. Singer, A theorem on holonomy, Trans. Amer. Math. Soc., 75 (1953), pp. 428–443.

[14] A. Nijenhuis, On the holonomy groups of linear connection, I, II, Koninkl, Nederl. Akademie van Wetenschappen, Amsterdam, Proc., Series A, 56 (1953), pp. 233–249, 57 (1954) pp. 17–25.

[15] C. Ehresmann, Les connexions infinitésimales dans un espace fibré differentiable, Colloque de Topologie, Bruxelles, 1950, pp. 29–55.

[16] C. Ehresmann, Les prolongements d'une variété differentiable, I, II, III, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 233 (1951), pp. 598–600, 777–779, 1081–1083 ; IV, V ibid. 234 (1952), pp. 1028–1030, 1424–1425.

索　　引

レ

ワ

接続の幾何学
現代数学講座 19
定価 600 円

検印省略

昭和31年 2 月28日 初版 1 刷発行
昭和42年 9 月15日 初版 3 刷発行

著者 大槻富之助
発行者 南條初五郎
東京都文京区小日向4丁目6番19号
印刷者 岩永吉光
東京都新宿区市ケ谷本村町27番地

発行所 東京都文京区小日向4丁目6番19号
電話東京(947)2511(代表)
振替口座東京57035番
共立出版株式会社

印刷・新日本印刷 製本・菊池製本 Printed in Japan

社団法人
自然科学書協会
会員